TABLE DES MATIERES

Ce chapitre n'est qu'un rappel des résultats établis dans le cours de mathématiques de Deug $2^{ème}$ année. Pour les démonstrations, on se reportera à ce cours.

1. Notations et résultats préliminaires

1.1. Fonctions périodiques

Soit $T \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$
On dira que f est T-périodique si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t+T) = f(t)$

Remarque : la donnée d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ équivaut à la donnée de 2 fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ($\varphi_1 = \mathrm{Re}\, f$ et $\varphi_2 = \mathrm{Im}\, f$).

Soit f T-périodique, bornée, intégrable au sens de Riemann sur un intervalle-période
Alors :
- f est intégrable sur tout intervalle borné
- $\int_a^b f(t)\, dt = \int_{a+nT}^{b+nT} f(t)\, dt \qquad (\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R})$
- $\int_\alpha^{\alpha+T} f(t)\, dt = \int_0^T f(t)\, dt \qquad (\forall \alpha \in \mathbb{R})$

Les fonctions T-périodiques, bornées, intégrables au sens de Riemann sur un intervalle-période constituent un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ noté E_T.

1.2. "Produit scalaire" sur E_T

On sait que si f et $g \in E_T$, $f\bar{g} \in E_T$. On définit la forme hermitienne :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \bar{g}(t)\, dt$$

On vérifie que :
$$\langle f_1 + f_2, g \rangle = \langle f_1, g \rangle + \langle f_2, g \rangle$$
$$\langle f, g_1 + g_2 \rangle = \langle f, g_1 \rangle + \langle f, g_2 \rangle$$
$$\langle \lambda f, g \rangle = \lambda \langle f, g \rangle \quad \text{et} \quad \langle f, \mu g \rangle = \bar{\mu} \langle f, g \rangle$$
$$\langle g, f \rangle = \overline{\langle f, g \rangle}$$
$$\langle f, f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \bar{f}(t)\, dt = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2\, dt \quad \text{est un réel} \geq 0$$

Attention : dans E_T, $\langle f, f \rangle = 0$ ne permet pas de conclure que $f = 0$.
Exemple : la fonction T-périodique, nulle partout, sauf en un point de la période.

Il manque donc la propriété $\langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow f = 0$ pour faire de la forme hermitienne $\langle f, g \rangle$ un véritable produit scalaire.

La fonction : $e_n \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longmapsto e^{in\frac{2\pi}{T}t} \end{cases}$ $(n \in \mathbb{Z})$ est T-périodique.

Proposition 1
L'ensemble des fonctions $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ constitue un système orthonormé dans E_T pour le "produit scalaire" défini précédemment ($\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{nm}$).
On en déduit que le système est libre.

1.3. Polynômes trigonométriques

On appelle polynôme trigonométrique (T-périodique) une combinaison linéaire finie, à coefficients complexes, des fonctions e_n. Pour alléger les notations on pose $\omega = 2\pi/T$.

$$P(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\omega t} \quad \text{avec } c_n = 0 \text{, sauf pour un nombre fini de valeurs de } n$$

$P(t)$ est $2\pi/\omega$ - périodique ; l'ensemble des polynômes $2\pi/\omega$ - périodiques est un sous-espace vectoriel $\mathcal{P}_{2\pi/\omega}$ de $E_{2\pi/\omega}$.

Pour tout polynôme trigonométrique $P(t) \neq 0$, il existe un entier $N \geq 0$, tel que l'un des 2 coefficients C_N ou C_{-N} n'est pas nul et, pour tout $n > N$, $c_n = c_{-n} = 0$.
On en déduit que $P(t)$ peut s'écrire :

$$P(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\omega t} = c_0 + \sum_{n=1}^{N} \left(c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t} \right) \tag{1}$$

On dit alors que $P(t)$ est de degré N.
L'ensemble des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à N est un sous-espace vectoriel $\mathcal{P}^{(N)}_{2\pi/\omega}$ de $\mathcal{P}_{2\pi/\omega}$.

$\mathcal{P}^{(N)}_{2\pi/\omega}$ a pour dimension $2N+1$; les $\{e_n\}_{-N \leq n \leq N}$ en sont une base orthonormée.

$$\mathcal{P}^{(N)}_{2\pi/\omega} \subset \mathcal{P}_{2\pi/\omega} = \bigcup_N \mathcal{P}^{(N)}_{2\pi/\omega} \subset E_{2\pi/\omega}$$

$\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base algébrique orthonormée de $\mathcal{P}_{2\pi/\omega}$, puisque par définition tout polynôme est combinaison linéaire finie des e_n. $\mathcal{P}_{2\pi/\omega}$ est de dimension infinie.

On notera que :

$$\langle P, e_k \rangle = \langle \sum_{n=-N}^{N} c_n e_n , e_k \rangle = \sum_{n=-N}^{+N} c_n \langle e_n, e_k \rangle = c_k = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) e^{-ik\omega t} dt \tag{2}$$

$$P = \sum_{n=-N}^{+N} c_n e_n = \sum_{n=-N}^{N} \langle P, e_n \rangle e_n \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \langle P, P \rangle &= \langle \sum_{n=-N}^{N} c_n e_n , \sum_{k=-N}^{+N} c_k e_k \rangle = \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 = \sum_{n=-N}^{N} |\langle P, e_n \rangle|^2 \\ &= \sum_{n=-N}^{N} c_n \overline{c_n} = \sum_{n=-N}^{N} \langle P, e_n \rangle \langle e_n, P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T |P(t)|^2 dt \end{aligned} \tag{4}$$

Plus généralement, si Q est un polynôme trigonométrique de degré M,

$Q(t) = \sum_{n=-M}^{M} d_n e^{in\omega t}$ et si l'on suppose par exemple $M \leq N$, alors :

$$\langle Q, P \rangle = \sum_{n=-M}^{M} d_n \overline{c_n} = \sum_{n=-M}^{M} \langle Q, e_n \rangle \langle e_n, P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T Q(t) \overline{P}(t) dt \tag{5}$$

On décompose parfois un polynôme trigonométrique en utilisant les fonctions $(\sin n\omega t)$ et $(\cos n\omega t)$.

$$P(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \right) \tag{6}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les coefficients a_n, b_n, c_n sont liés par les relations :

$$\begin{cases} c_n = \dfrac{a_n - i b_n}{2} \\ c_{-n} = \dfrac{a_n + i b_n}{2} \end{cases} (7) \Leftrightarrow \begin{cases} a_n = c_n + c_{-n} \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) \end{cases} (8) \quad \text{avec } a_0 = c_0$$

On note : $\gamma_n(t) = \cos n\omega t$ et $s_n(t) = \sin n\omega t$

<u>Proposition 2</u> L'ensemble des fonctions $\{1, \gamma_n, s_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ constitue un système orthogonal, non normé ; on a : $\langle \gamma_n, \gamma_n\rangle = \langle s_n, s_n\rangle = 1/2$

Remarque : la décomposition d'un polynôme trigonométrique en une somme de sinus et cosinus est bien adaptée au cas où il est à valeurs réelles.
On vérifiera que :

$$P(t) \text{ à valeurs réelles} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 \in \mathbb{R} \\ a_n \in \mathbb{R},\ b_n \in \mathbb{R} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_0 \in \mathbb{R} \\ c_n = \overline{c_{-n}} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)\end{cases}$$

<u>Dans le cas où $P(t)$ est réel</u>, si l'on pose $c_n = |c_n| e^{-i\varphi_n}$, on obtient :

$$P(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{N} |c_n| \left(e^{i(n\omega t - \varphi_n)} + e^{-i(n\omega t - \varphi_n)} \right) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} 2|c_n| \cos(n\omega t - \varphi_n)$$

On écrit :

$$\begin{cases} P(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} A_n \cos(n\omega t - \varphi_n) \\ \text{avec } A_n \geqslant 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \tag{9}$$

Entre ces divers coefficients existent les relations suivantes (pour $n>0$)

$$\begin{aligned} A_n &= 2|c_n| \\ a_n &= A_n \cos\varphi_n = 2|c_n| \cos\varphi_n \\ b_n &= A_n \sin\varphi_n = 2|c_n| \sin\varphi_n \\ A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \end{aligned} \tag{10}$$

A_n et φ_n représentent l'amplitude et la phase de l'harmonique de rang n.

1.4. <u>Séries trigonométriques</u>

Une série trigonométrique T-périodique est en général notée
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$ $\quad (\omega = \frac{2\pi}{T} \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R},\ c_n \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{Z})$.
On dira qu'elle est convergente si la série de fonctions

$c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t})$ converge

c'est-à-dire si la suite de polynômes trigonométriques

$S_N(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{N} (c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t})$ a une limite quand $N \to +\infty$

Donc, par définition :

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} \text{ converge} \\ \text{et a pour somme } S(t) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \lim_{N\to+\infty} \left(\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\omega t} \right) = S(t)$$

Comme pour les polynômes trigonométriques, on écrit parfois les séries trigonométriques sous la forme $a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$.

Rappel sur différents types de convergence des séries de fonctions

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$ une série de fonctions de la variable réelle t, à valeurs dans $\mathbb{C}$.

On note : $S_N(t) = \sum_{n=0}^{N} u_n(t)$

- Convergence simple de la série de fonctions vers la fonction $S(t)$
  C'est la convergence, pour chaque valeur de t, de la suite de nombres complexes $S_N(t)$ vers le nombre $S(t)$.
  Pour chaque t, la suite des restes $R_N(t) = S(t) - S_N(t)$ tend vers zéro, quand $N \to +\infty$
- Convergence uniforme sur un intervalle I de $\mathbb{R}$
  $S_N(t)$ converge simplement vers $S(t)$ et $\sup_{t\in I} |R_N(t)| \to 0$ quand $N \to +\infty$
- Convergence normale de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$ sur $I \subset \mathbb{R}$
  Il existe une série numérique convergente, à termes positifs v_n, telle que :
  $|u_n(t)| \leq v_n \quad \forall t \in I$

La convergence normale implique la convergence uniforme, qui elle-même implique la convergence simple (voir Deug 2ème année).

Remarque importante

Supposons que la série trigonométrique $\sum_n c_n e^{in\omega t}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $S(t)$.

Cela signifie que, pour chaque t, la suite de nombres complexes $\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\omega t}$ tend vers $S(t)$ quand $N \to +\infty$.

Alors :

- chacune des sommes $\sum_{n=1}^{N} c_n e^{in\omega t}$ et $\sum_{n=1}^{N} c_{-n} e^{-in\omega t}$ n'a pas nécessairement une limite quand $N \to +\infty$ (on cherchera, à titre d'exercice, un contre-exemple)
- par contre la série des sinus et la série des cosinus sont séparément convergentes.

Démonstration

$\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\omega t} = a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$ tend vers $S(t)$ quand $N \to +\infty$

$\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{-in\omega t} = a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos n\omega t - b_n \sin n\omega t)$ tend vers $S(-t)$ quand $N \to +\infty$

En faisant la somme et la différence, on déduit que :

la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos n\omega t$ converge simplement vers $\dfrac{S(t) + S(-t)}{2}$

la série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin n\omega t$ converge simplement vers $\dfrac{S(t) - S(-t)}{2}$

Théorème 1

Si une série trigonométrique T-périodique converge uniformément sur $\mathbb{R}$, sa somme $S(t)$ est continue, périodique, de période $T = 2\pi/\omega$ et les coefficients a_n, b_n, c_n vérifient les égalités :

$$C_n = \frac{1}{T}\int_0^T S(t)\, e^{-in\omega t}\, dt = \langle S, e_n \rangle \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$a_0 = C_0$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T S(t) \cos n\omega t\, dt = 2\langle S, \gamma_n \rangle \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T S(t) \sin n\omega t\, dt = 2\langle S, s_n \rangle \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Lemme de Riemann-Lebesgue

Si φ est une fonction intégrable sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi(x)\sin(nx)\,dx = 0$

2. Définitions et propriétés des coefficients de Fourier d'une fonction T-périodique

2.1. Définitions

Les relations précédentes nous conduisent à définir, pour toute fonction $f \in E_T$, les coefficients suivants, appelés coefficients de Fourier :

$$C_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt = \langle f, e_n \rangle \qquad \forall n \in \mathbb{Z} \qquad \left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right) \qquad (11)$$

$$a_0(f) = C_0(f)$$

$$\left.\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t\, dt = 2\langle f, \gamma_n \rangle \\ b_n(f) &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t\, dt = 2\langle f, s_n \rangle \end{aligned}\right\} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad (12)$$

on vérifiera que ces coefficients sont liés par les relations (7) et (8).

On peut se demander s'il est possible de reconstituer f à partir des coefficients c_n et plus précisement si l'on peut écrire f comme somme de la série $\sum_n C_n(f) e^{in\omega t}$. Etant donné que deux fonctions de E_T, égales sur une période sauf en un nombre fini de points, ont les mêmes coefficients de Fourier, la "reconstitution" de f nécessitera des hypothèses restrictives sur la fonction f.

2.2. Propriétés

- $C_n(f), a_n(f), b_n(f)$ tendent vers zéro pour $|n| \to +\infty$ (lemme de Riemann-Lebesgue)
- si f est une fonction à valeurs réelles, les coefficients $a_0(f)$, $a_n(f)$, $b_n(f)$ sont réels. C'est pourquoi on les appelle souvent coefficients de Fourier réels (bien qu'ils soient complexes dans le cas où f est à valeurs dans $\mathbb{C}$).
- quelques propriétés des C_n sont résumées dans le tableau qui suit.

fonction	coefficient de Fourier de rang n
$f(t)$	$c_n(f)$
$\lambda f(t)+\mu g(t)$	$\lambda c_n(f)+\mu c_n(g)$
$f(t-\tau)$	$e^{-in\omega\tau} c_n(f)$
$e^{in_0\omega t} f(t)$	$c_{n-n_0}(f)$
$f(-t)$	$c_{-n}(f)$
$\overline{f(t)}$	$\overline{c_{-n}(f)}$

• si f est réelle paire

$a_n(f) = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega t \, dt \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$a_0(f) = c_0(f) = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\, dt$

$b_n(f) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

• si f est réelle impaire

$b_n(f) = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin n\omega t \, dt \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$a_n(f) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

• si f est constante $(\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = k)$, alors $c_0(f) = k$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $c_n(f) = 0$

2.3. <u>Série de Fourier d'une fonction T-périodique</u>

On appelle série de Fourier de $f \in E_T$, la série trigonométrique $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{in\omega t}$.

Lorsqu'elle converge, on note $S_f(t)$ sa somme : c'est la limite, quand $N \to +\infty$, du polynôme trigonométrique

$$S_f^N(t) = c_0(f) + \sum_{n=1}^{N}\left(c_n(f)e^{in\omega t} + c_{-n}(f)e^{-in\omega t}\right) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{N}\left(a_n(f)\cos n\omega t + b_n(f)\sin n\omega t\right)$$

3. <u>Convergence de la série de Fourier d'une fonction T-périodique</u>

Il s'agit de savoir si les polynômes S_f^N ont une limite quand $N \to +\infty$.

En particulier, pour $t \in \mathbb{R}$, a-t-on $S_f^N(t) \to f(t)$? (dans ce cas, on écrira : $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{in\omega t} = S_f(t)$). Si on suppose seulement que $f \in E_T$, il n'y a aucune raison pour que $S_f^N(t)$ converge en tout point vers $f(t)$, puisque la modification de f sur un ensemble fini de points d'une période ne change pas les coefficients de Fourier - Même la continuité de f n'assure pas la convergence de $S_f^N(t)$ vers $f(t)$ pour tout t.

Les théorèmes qui suivent permettent de donner des réponses dans la plupart des situations rencontrées par les physiciens.

3.1. Rappel de quelques définitions

1°/ f est continue (respectivement monotone) par morceaux sur $[a,b]$, s'il existe un nombre fini de points $a_0 = a < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$ tels que :
- f est définie sur $[a,b]$ sauf peut-être en certains de ces points.
- f est continue (respectivement monotone) sur chacun des intervalles $]a_{i-1}, a_i[$ $\quad (i = 1, 2, \dots, n)$
- f admet en chacun des points a_i $(i = 1, 2, \dots, n-1)$ une limite finie à droite et à gauche (uniquement à droite pour a_0 et à gauche pour a_n).

Les limites à droite et à gauche seront notées respectivement $f(a_i+0)$ et $f(a_i-0)$.

f est dite de classe $\mathcal{C}^{(1)}$ par morceaux sur $[a,b]$ si :
- f et f' sont définies continues sur $[a,b]$ sauf peut-être en un nombre fini de points
- en chacun de ces points, f et f' admettent respectivement des limites finies à droite et à gauche.

Une fonction périodique est dite continue (ou monotone) (ou $\mathcal{C}^{(1)}$ par morceaux), si elle vérifie les propriétés précédentes sur un intervalle-période fermé.

2°/ variation totale d'une fonction sur un segment $[a,b]$
on partage $[a,b]$ en un nombre fini d'intervalles : $a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b$.
La variation totale de f sur $[a,b]$, notée $V(f;[a,b])$, est la borne supérieure des sommes $\sum_{i=0}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)|$ calculée sur l'ensemble de toutes les décompositions de $[a,b]$ en un nombre fini d'intervalles.

3°/ Si $V(f;[a,b])$ est fini, on dit que f est à variation bornée sur $[a,b]$.
Rappel : une fonction à variation bornée est intégrable.
Exemples :
- toute fonction monotone bornée est à variation bornée et $V = |f(b) - f(a)|$
- si f bornée n'a qu'un nombre fini de maxima et de minima relatifs entre a et b, elle est à variation bornée ; cela prouve que les fonctions bornées rencontrées dans la pratique sont à variation bornée.
(attention : il existe des fonctions continues sur $[a,b]$, à variation non bornée).

On démontre que toute fonction à variation bornée est différence de 2 fonctions croissantes bornées.

3.2 Théorèmes de convergence

Théorème 2
Soit f une fonction T-périodique, $\mathcal{C}^{(1)}$ par morceaux. La série de Fourier de f converge simplement pour tout t et a pour somme $\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$.

On a donc : $S_f(t) = \lim_{N \to +\infty} S_f^N(t) = \frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$

Pour chaque point t où f est continue, $S_f(t) = f(t)$. On dit alors que f est développable en série de Fourier au point t. On écrit : $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{in\omega t}$

Théorème 2'
Soit f T-périodique, continue sur $\mathbb{R}$, à dérivée continue par morceaux. La série de Fourier converge normalement, donc uniformément vers f.

Théorème 3

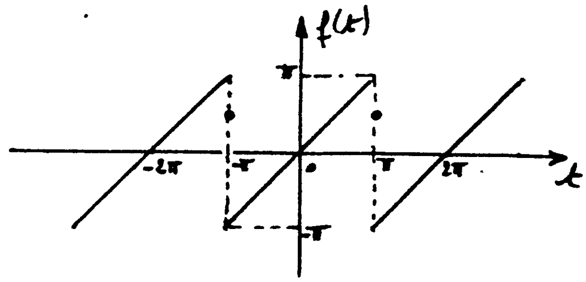
Soit f une fonction T-périodique, à variation bornée sur un intervalle-période. Alors, la série de Fourier de f converge pour tout t vers $\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$. De plus, la convergence est uniforme sur tout intervalle $[a,b]$ où f est continue.

Théorème 3'

Pour f monotone par morceaux : mêmes conclusions que le théorème 3.

3.3. Exemples et analyse des exemples

1er exemple



f, 2π-périodique, est définie par :

$$\begin{cases} f(t) = t & \text{pour } t \in]-\pi, +\pi[\\ f(\pi) = f(-\pi) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

f est monotone par morceaux, donc sa série de Fourier converge pour tout t. Le calcul des coefficients de Fourier conduit à :

$$S_f(t) = 2\left(\sin t - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} - \cdots\right) = 2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nt}{n}$$

Le théorème 3' permet d'écrire :

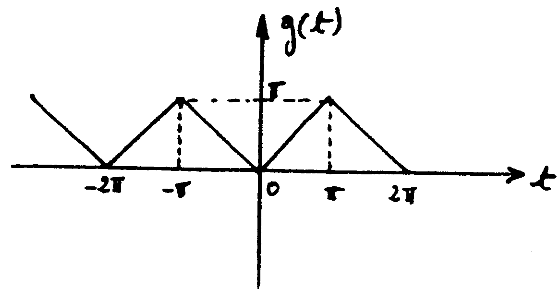
$\forall t \neq (2k+1)\pi \quad S_f(t) = f(t)$ puisque f est continue en ces points.

En particulier : pour $t \in]-\pi, +\pi[$, $\quad 2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nt}{n} = t$

Pour $t = (2k+1)\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, chacun des termes de la série est nul. On vérifie que la somme de la série de Fourier : $\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2} = \frac{\pi - \pi}{2}$ est bien nulle

et on note que $\quad 0 = S_f[(2k+1)\pi] \neq f[(2k+1)\pi] = \frac{\pi}{2}$

2ème exemple



g, 2π-périodique, est définie par :

$g(t) = |t|$ pour $t \in [-\pi, +\pi]$

g est continue, à dérivée continue par morceaux.

Sa série de Fourier converge normalement vers $g(t)$ sur $\mathbb{R}$.

Le calcul des coefficients de Fourier conduit à :

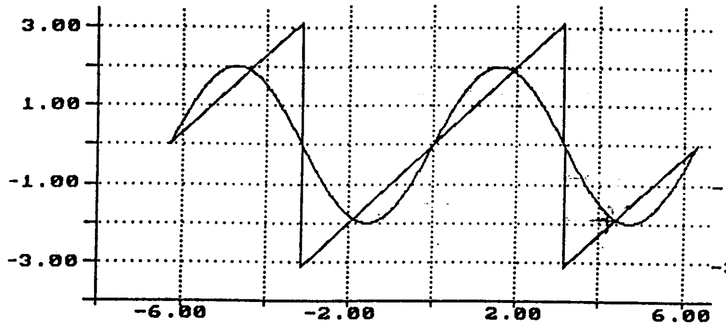
$$S_g(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(2n+1)t}{(2n+1)^2} = g(t)$$ (on vérifie la convergence normale)

Cette égalité, écrite pour $t=0$, permet de calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

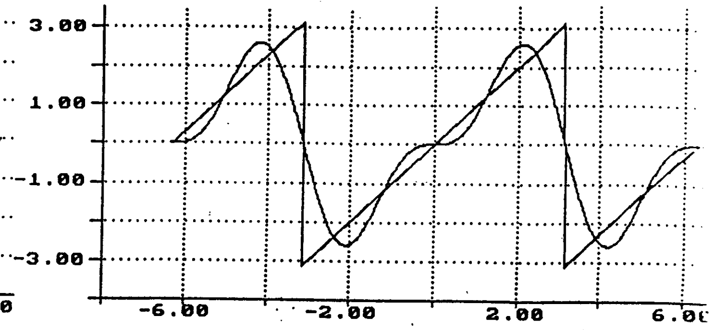
$$\begin{cases} f : 2\pi\text{-périodique} \\ f(t) = t \text{ pour } t \in \left]-\pi, +\pi\right[\end{cases}$$

$$S_f(t) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(nt)}{n}$$

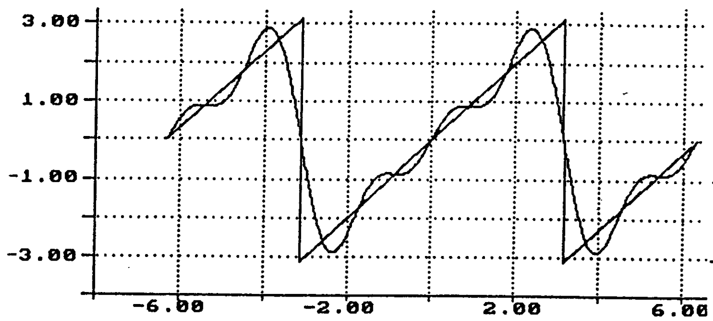
$$S_f^N(t) = 2\sum_{n=1}^{N} (-1)^{n+1} \frac{\sin(nt)}{n}$$



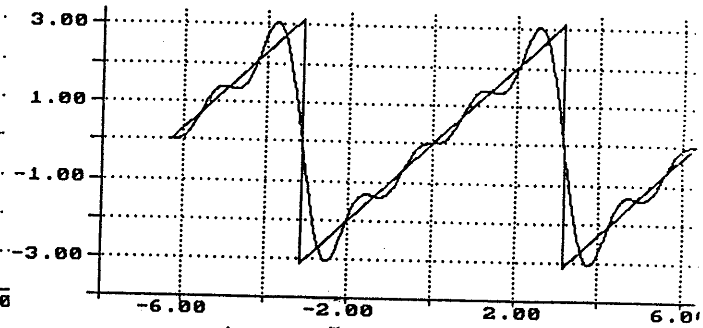
graphes de $f(t)$ et $S_f^1(t) = 2\sin t$



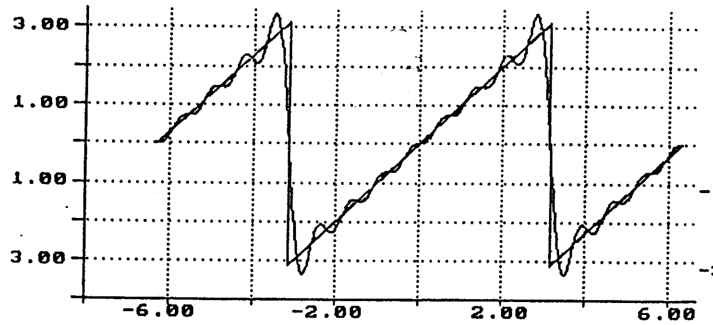
graphes de $f(t)$ et $S_f^2(t) = 2\left(\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)$



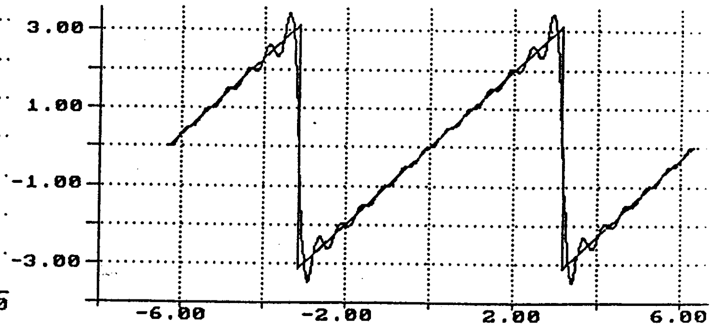
graphes de $f(t)$ et $S_f^3(t) = 2\left(\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin 3t\right)$



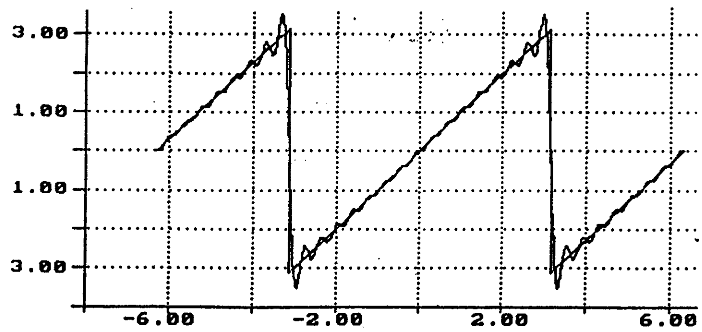
graphes de $f(t)$ et $S_f^4(t)$



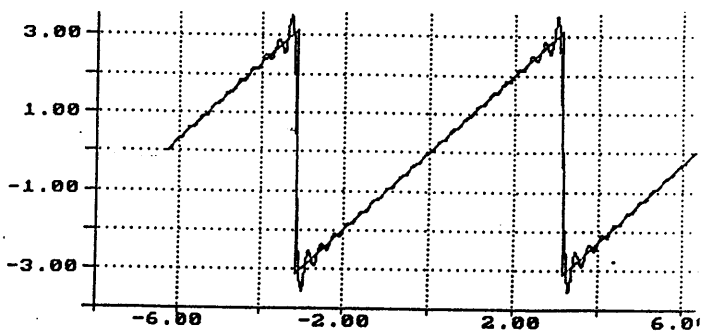
$f(t)$ et $S_f^8(t)$



$f(t) = S_f^{12}(t)$



$f(t)$ et $S_f^{16}(t)$

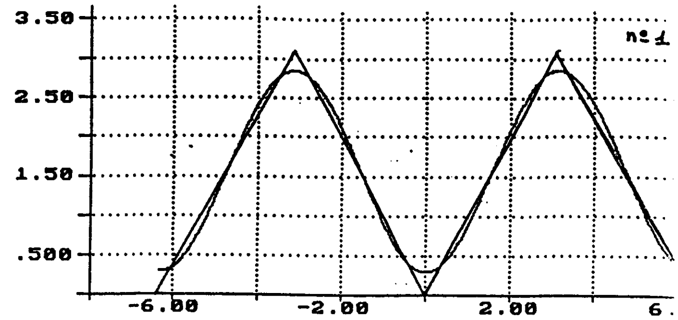


$f(t)$ et $S_f^{20}(t) = 2\left(\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin 3t - \cdots - \frac{1}{20}\sin 20t\right)$

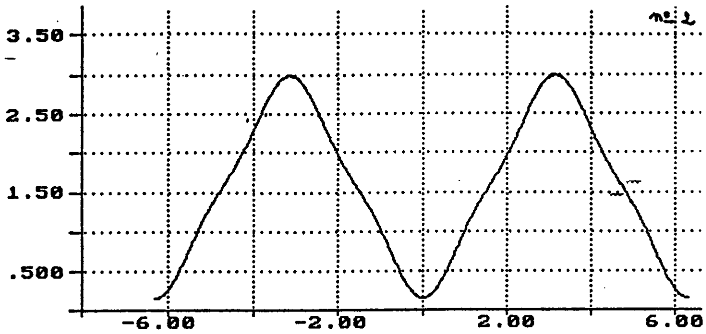
$$\begin{cases} g : 2\pi\text{- périodique} \\ g(t) = |t| \text{ pour } t \in [-\pi, +\pi] \end{cases}$$

$$S_g(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2n+1)t}{(2n+1)^2}$$

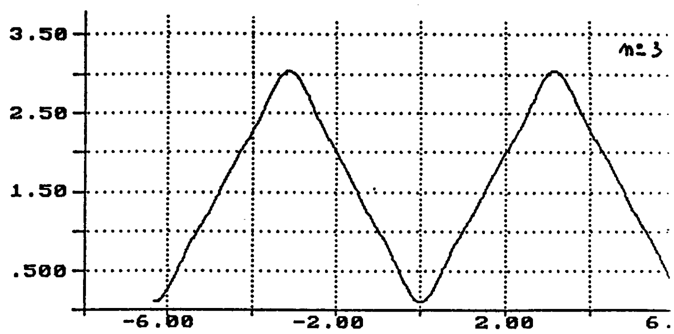
$$S_g^N(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{N} \frac{\cos(2n+1)t}{(2n+1)^2}$$



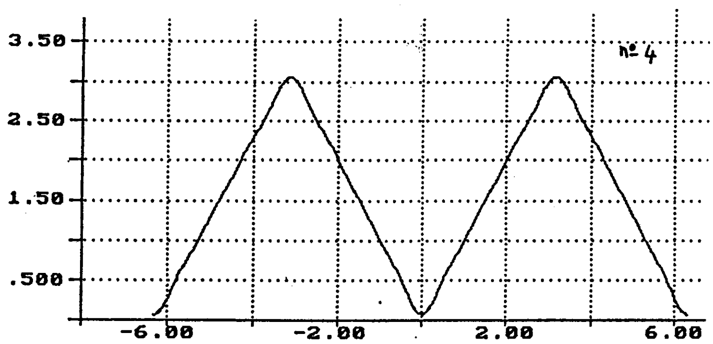
graphes de $S_g^0(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos t$ et de $g(t)$



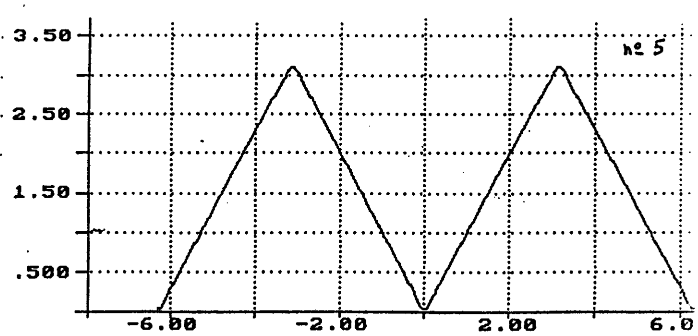
$S_g^1(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos t + \frac{1}{3^2}\cos 3t\right)$



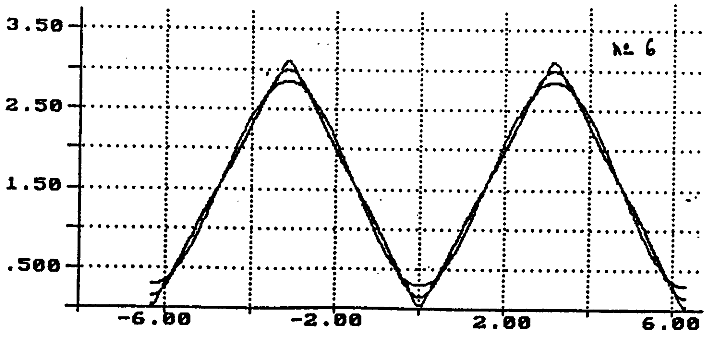
$S_g^2(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos t + \frac{1}{3^2}\cos 3t + \frac{1}{5^2}\cos 5t\right)$



$S_g^3(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{3} \frac{\cos(2n+1)t}{(2n+1)^2}$



$$S_g^7(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{7} \frac{\cos(2n+1)t}{(2n+1)^2}$$
$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos t + \frac{1}{3^2}\cos 3t + \dots + \frac{1}{15^2}\cos 15t\right)$$



sur cette figure, les courbes n^os 1, 2 et 5 sont superposées.

3.4 Quelques commentaires

1°/ pour $t \in [0,\pi[$, on a $S_f(t) = f(t) = g(t) = S_g(t)$.

A la différence des séries entières, deux séries trigonométriques peuvent avoir même somme sur tout un intervalle et ne pas être identiques.

2°/ les coefficients de Fourier font intervenir les valeurs de f dans tout un intervalle-période, contrairement aux coefficients du développement de Taylor qui ne font intervenir que les valeurs de f au voisinage du point où on effectue le développement.

3.5 Développement en série trigonométrique, sur un intervalle donné, d'une fonction non périodique

Définitions

1°/ Soit f une fonction non périodique, définie sur un intervalle $]a,b[$.
On appelle développement en série de Fourier de f dans l'intervalle $]a,b[$ le développement de Fourier de la fonction f_0, de période $(b-a)$, qui coïncide avec f sur l'intervalle $]a,b[$.

2°/ Soit f une fonction définie sur un intervalle $]0,b[$.

- on appelle développement en série de cosinus de f dans l'intervalle $]0,b[$ le développement de Fourier de la fonction f_1, paire, de période $2b$, qui coïncide avec f sur l'intervalle $]0,b[$.
- on appelle développement en série de sinus de f dans l'intervalle $]0,b[$ le développement de Fourier de la fonction f_2, impaire, de période $2b$, qui coïncide avec f sur l'intervalle $]0,b[$.

Remarque 1: la classe des fonctions développables en série entière sur $]0,T[$ est plus restreinte que celle des fonctions développables en série de Fourier sur ce même intervalle; dans le 1^er cas, il faut (et ce n'est pas suffisant) que la fonction soit indéfiniment dérivable sur $]0,T[$; dans le 2^ème cas, il suffit qu'elle soit continue, & dérivée continue par morceaux sur $]0,T[$

Remarque 2 : il n'y a pas unicité du développement en série trigonométrique, sur un intervalle donné, pour f non périodique.

4. Egalité de Parseval

Théorème 4

Soit f une fonction appartenant à E_T. La série des carrés des modules de ses coefficients de Fourier est convergente et vérifie l'égalité :

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt} \qquad (13)$$

Pour f et g appartenant à E_T :

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\overline{c_n(g)} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\overline{g(t)}\,dt} \qquad (14)$$

Remarque 1

L'égalité (13) signifie que $|c_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{N}\left(|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2\right)$ a pour limite $\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt$, quand $N \to +\infty$.

De même l'égalité (14) signifie que :

$$\lim_{N\to+\infty}\left[c_0(f)\overline{c_0(g)} + \sum_{n=1}^{N}\left(c_n(f)\overline{c_n(g)} + c_{-n}(f)\,\overline{c_{-n}(g)}\right)\right] = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\overline{g(t)}\,dt$$

Remarque 2

Si on utilise les coefficients des sinus et cosinus, les égalités deviennent :

$$\boxed{|a_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt} \qquad (13')$$

$$\boxed{a_0(f)\,\overline{a_0(g)} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n(f)\overline{a_n(g)} + b_n(f)\overline{b_n(g)}}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\overline{g(t)}\,dt} \qquad (14')$$

Remarque 3

Les relations (13) et (14) s'écrivent encore

$$\langle f, f\rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\langle f, e_n\rangle|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\langle f, e_n\rangle\langle e_n, f\rangle$$

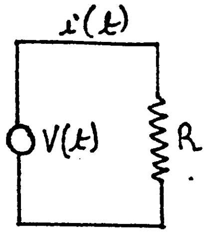
$$\langle f, g\rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\langle f, e_n\rangle\langle e_n, g\rangle$$

On notera l'analogie avec les égalités (4) et (5) écrites pour des polynômes trigonométriques. La différence fondamentale tient à ce que les deuxièmes membres des égalités ne sont plus des sommes finies comme dans (4) et (5), mais des sommes infinies qui convergent respectivement vers $\langle f,f\rangle$ et $\langle f,g\rangle$ (remarque 1).

Par contre, "l'extension" de l'égalité (3), $P = \sum_{n=-N}^{+N}\langle P, e_n\rangle e_n$, qui consisterait à écrire toute fonction de E_T comme somme, au sens de la convergence simple, de sa série de Fourier n'est pas possible. Les théorèmes de convergence ont montré que ce résultat n'est vrai que pour certaines fonctions de E_T.
Ces questions seront abordées de nouveau à la fin du chapitre suivant, pour un ensemble de fonctions T-périodiques, noté $L^2(T)$, sur lequel sera défini une notion d'intégrale différente de l'intégrale de Riemann.

Interprétation physique de la formule de Parseval

Energie d'un signal



Le signal est ici une différence de potentiel $V(t)$, T-périodique, appliquée aux bornes d'une résistance R.

La puissance instantannée dissipée dans R est : $P(t) = \frac{V^2(t)}{R}$

L'énergie, dissipée par effet Joule, pendant une période, vaut :

$$E(T) = \int_0^T P(t)\,dt = \int_0^T \frac{V^2(t)}{R}\,dt$$

On suppose que $V(t)$ est décomposable en série de Fourier. On écrit la série des sinus et cosinus puisque $V(t)$ est une fonction réelle.

$$V(t) = v_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (v_n \cos n\omega t + w_n \sin n\omega t)$$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$; $v_n \in \mathbb{R}$ et $w_n \in \mathbb{R}$

L'énergie dissipée, pendant une période, par l'harmonique de rang n, vaut :

$$E_n(T) = \frac{1}{R}\int_0^T (v_n \cos n\omega t + w_n \sin n\omega t)^2\,dt$$

on vérifiera que : $E_n(T) = \frac{T}{2R}(v_n^2 + w_n^2)$

$$E_0(T) = \frac{T v_0^2}{R}$$

L'égalité de Parseval s'écrit : $E(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} E_n(T)$

L'énergie totale dissipée est la somme des énergies dissipées par les différents harmoniques.

5. Dérivation et intégration des séries de Fourier

5.1 Dérivation

Remarque préliminaire : si f est T-périodique et dérivable, sa dérivée f' est T-périodique (à vérifier).

Dans ce paragraphe, on cherche à répondre aux questions suivantes : si f est T-périodique et dérivable, la série de Fourier de f' s'obtient-elle en dérivant terme à terme la série de Fourier de f ? Si oui, converge-t-elle vers f' ?

Proposition 3

Si f est T-périodique, continue sur $\mathbb{R}$, à dérivée continue par morceaux, la série de Fourier de f' est la dérivée terme à terme de la série de Fourier de f, ce qui se traduit par l'égalité :

$$\boxed{C_n(f') = in\omega\, C_n(f)} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \qquad (15)$$

Si on utilise les coefficients des sinus et cosinus, l'égalité précédente devient :

$$a_0(f') = 0 \qquad \left.\begin{array}{l} a_n(f') = n\omega\, b_n(f) \\ b_n(f') = -n\omega\, a_n(f) \end{array}\right\} \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad (15')$$

On notera que cette proposition n'affirme rien sur la convergence de la série de Fourier de f'. Pour conclure sur ce point, on peut regarder si les théorèmes (2) et (3) sont applicables à f'.

Proposition 4

Soit f T-périodique, de classe $\mathcal{C}^{(1)}$ sur $\mathbb{R}$, admettant une dérivée f'' continue par morceaux. Alors, la série de Fourier de f' converge normalement vers f' et ses coefficients vérifient l'égalité (15).

Sous les hypothèses de cette proposition :

$$S_{f'}(t) = f'(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} in\omega C_n(f)\, e^{in\omega t} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(n\omega\, b_n(f) \cos n\omega t - n\omega\, a_n(f) \sin n\omega t \right)$$

Théorème 5

Soit f T-périodique, de classe $\mathcal{C}^{(k-1)}$ sur $\mathbb{R}$, admettant une dérivée d'ordre k continue par morceaux. Alors, les coefficients de Fourier des dérivées successives vérifient les égalités :

$$C_n(f^{(k)}) = in\omega\, C_n(f^{(k-1)}) = \cdots = (in\omega)^k\, C_n(f)$$

De plus, pour $n \neq 0$, on peut donner une majoration des coefficients de Fourier de f :

$$\boxed{|C_n(f)| \leq \frac{M_k}{|n|^k \omega^k}} \qquad (16)$$

avec $M_k = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(t)|$

Cette dernière majoration a la conséquence suivante : plus une fonction f est dérivable, plus ses coefficients de Fourier tendent rapidement vers zéro quand $|n| \to +\infty$.

Etude des exemples du paragraphe 3.3.

- la fonction f est continue par morceaux ; on ne peut lui appliquer aucun des théorèmes précédents.

La dérivée terme à terme de la série de Fourier de f s'écrit :

$2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cos n t$; cette série ne converge pour aucune valeur de t.

Or, f' est la fonction constante, égale à 1, sauf pour $t = (2k+1)\pi$. sa série de Fourier se réduit à $C_0(f') = 1$. elle n'est donc pas égale à la dérivée terme à terme de la série de Fourier de f.

- pour la fonction g'

on peut utiliser la proposition 3 et appliquer le théorème 2 à g'. on obtient les résultats suivants :

$\forall t \neq k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$, $\quad S_{g'}(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2n+1)t}{2n+1} = g'(t)$

pour $t = k\pi$ $\quad S_{g'}(k\pi) = 0 = \frac{1}{2}\left[g'(t+0) + g'(t-0)\right] = \frac{1-1}{2}$

5.2 Intégration

Soit f T-périodique, continue par morceaux et F une primitive de f. F est-elle T-périodique ?

Toute primitive de f peut s'écrire : $F(t) = F(0) + \int_0^t f(\tau)\, d\tau$

$$F(t+T) = F(0) + \int_0^{t+T} f(\tau)\, d\tau = F(0) + \int_0^t f(\tau)\, d\tau + \int_t^{t+T} f(\tau)\, d\tau$$

$$F(t+T) = F(t) + \int_0^T f(\tau)\, d\tau = F(t) + T\, C_0(f)$$

Donc : F est T-périodique $\Leftrightarrow C_0(f) = 0$

Cette condition doit être réalisée pour qu'on puisse espérer développer F en série de Fourier.

Proposition 5

Soit f T-périodique, continue par morceaux et vérifiant $C_0(f) = 0$. Alors, la série de Fourier d'une primitive quelconque F de f s'écrit :

$$S_F(t) = A + \sum_{n \neq 0} \frac{C_n(f)}{i n \omega}\, e^{i n \omega t}$$

Elle est normalement convergente et a pour somme $F(t)$, pour tout t.

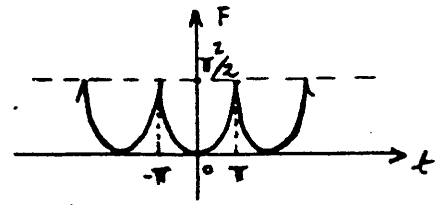
Remarques

- Sous les hypothèses de la proposition 5, la série de Fourier de F s'obtient par intégration terme à terme de la série de Fourier de f
- f est continue par morceaux, mais F est continue (revoir les propriétés de l'intégrale de Riemann)
- il est important de noter qu'on ne sait rien sur la convergence de la série de Fourier de f, puisque f est seulement supposée continue par morceaux ; F est développable en série de Fourier sans que f le soit nécessairement.

- la dérivation terme à terme d'une série de Fourier exige des hypothèses plus contraignantes que l'intégration terme à terme. Cela n'a rien d'étonnant : la relation (15) implique, pour que la série de Fourier de f' converge, une décroissance de $c_n(f)$ "suffisamment rapide" vers zéro quand $|n| \to +\infty$.

- dans le cas où $c_0(f) \neq 0$, la fonction $\varphi = f - c_0(f)$ vérifie la condition $c_0(\varphi) = 0$; on peut lui appliquer la proposition 5, si f est continue par morceaux

<u>Etude du 1er exemple du paragraphe 3.3</u>



f est continue par morceaux et $c_0(f) = 0$

$$S_F(t) = A + 2\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos nt}{n^2} = F(t)$$

On choisit d'étudier la primitive qui s'annule pour $t = 0$.
Elle vérifie la condition :

$$A + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 0$$

$$F(t) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos nt}{n^2} = F(0) + \int_0^t f(z)\,dz = \int_0^t f(z)\,dz$$

$F(t)$ est la fonction 2π-périodique, égale à $t^2/2$ sur $[-\pi, +\pi]$.

6. <u>Séries de Fourier du produit de deux fonctions T-périodiques et du produit de convolution de deux fonctions T-périodiques</u>

<u>Définition</u> Le produit de convolution de 2 fonctions f_1 et f_2 appartenant à E_T est la fonction f, notée $f_1 * f_2$, définie par :

$$f(t) = (f_1 * f_2)(t) = \frac{1}{T}\int_0^T f_1(t-z)\,f_2(z)\,dz$$

On vérifiera que $f \in E_T$ et que $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$.

<u>Proposition 6</u> Soient f_1 et f_2 deux fonctions appartenant à E_T. Alors :

$$c_n(f_1 * f_2) = c_n(f_1)\cdot c_n(f_2) \qquad (17)$$

$$c_n(f_1 f_2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f_1)\, c_{n-k}(f_2) \qquad (18)$$

Démonstration de l'égalité (17)

$$c_n(f_1 * f_2) = \frac{1}{T}\int_0^T (f_1 * f_2)(t)\, e^{-in\omega t}\,dt = \frac{1}{T^2}\int_0^T \left[\int_0^T f_1(t-z) f_2(z)\,dz\right] e^{-in\omega t}\,dt$$

$$= \frac{1}{T^2}\int_0^T \left[\int_0^T f_1(t-z)\, e^{-in\omega t}\,dt\right] f_2(z)\,dz$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T f_1(t-z)\,e^{-in\omega t}\,dt = \frac{1}{T}\int_{-z}^{T-z} f_1(u)\, e^{-in\omega(z+u)}\,du = \frac{e^{-in\omega z}}{T}\int_0^T f_1(u)\,e^{-in\omega u}\,du$$

$$= e^{-in\omega z}\, c_n(f_1)$$

$$c_n(f_1 * f_2) = \frac{1}{T}\int_0^T c_n(f_1)\, f_2(\tau) e^{-in\omega\tau} d\tau = \frac{c_n(f_1)}{T}\int_0^T f_2(\tau) e^{-in\omega\tau} d\tau$$
$$= c_n(f_1) \cdot c_n(f_2)$$

Démonstration de l'égalité (18)

$$C_n(f_1 \cdot f_2) = \frac{1}{T}\int_0^T f_1(t) f_2(t) e^{-in\omega t}\, dt$$

On utilise l'égalité de Parseval (14) et les propriétés des coefficients de Fourier qui figurent dans le tableau, page 6.

On pose : $g_2(t) = \overline{f_2(t)}\, e^{in\omega t}$

$$C_n(f_1 \cdot f_2) = \frac{1}{T}\int_0^T f_1(t)\overline{g_2(t)}\, dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k(f_1) \cdot \overline{C_k(g_2)} \quad \text{(d'après (14))}$$

$$C_k(g_2) = C_{k-n}(\overline{f_2}) = \overline{C_{n-k}(f_2)}$$

Donc : $\overline{C_k(g_2)} = C_{n-k}(f_2)$

$$C_n(f_1 \cdot f_2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k(f_1)\, C_{n-k}(f_2).$$

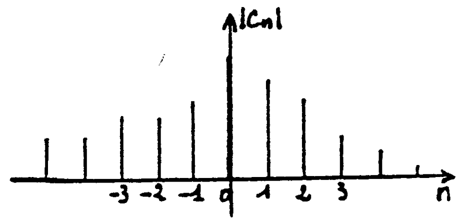
Définition

Soient deux séries $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} v_n$. Leur produit de convolution est, par définition la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} w_n$ de terme général $w_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k\, v_{n-k}$.

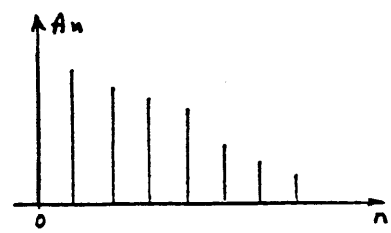
La proposition 6 peut donc s'exprimer de la manière suivante :
- au produit de convolution des fonctions correspond le produit de leurs coefficients de Fourier
- au produit des fonctions correspond le produit de convolution des coefficients de Fourier

7. Représentation graphique des séries de Fourier

Pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, on représente les modules des coefficients C_n par des segments de hauteur $|C_n|$ situés aux abscisses n.



Pour les fonctions à valeurs réelles, on a l'habitude de représenter le coefficient a_0 et les coefficients $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, plutôt que les C_n.
Cela revient à supprimer la partie du dessin correspondant à $n<0$ et à doubler les amplitudes pour $n>0$.
En effet, pour f réelle, $|C_n(f)| = |C_{-n}(f)|$ et $A_n = 2|C_n|$.

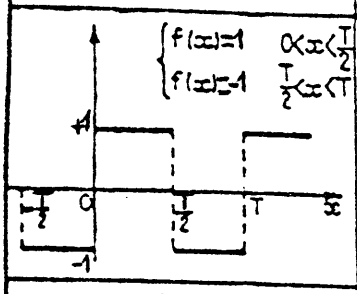
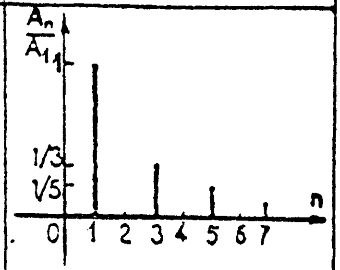
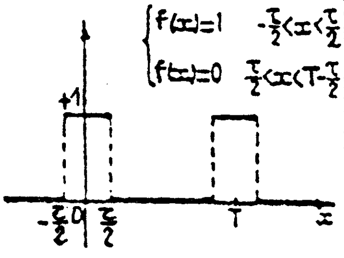
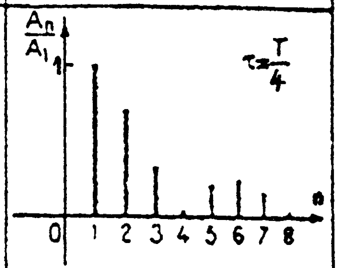
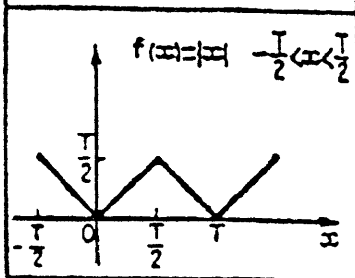
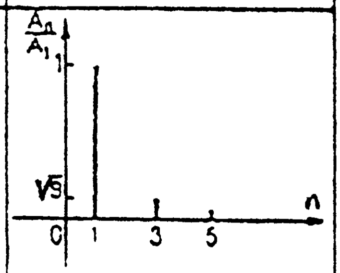
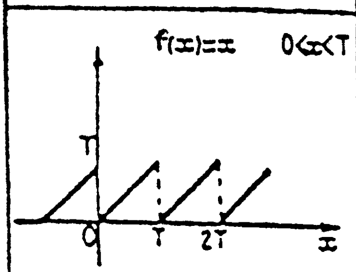
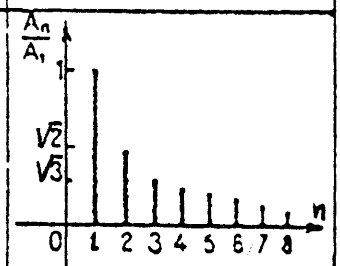
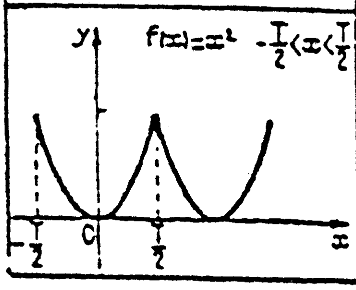
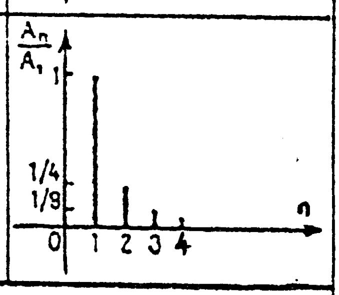


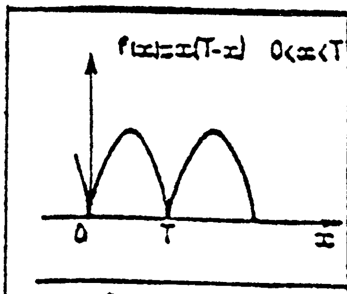
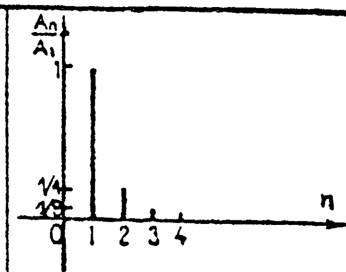
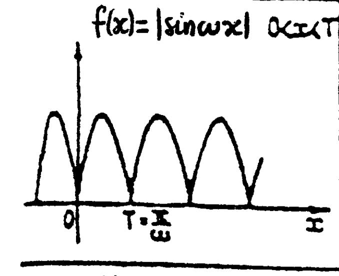
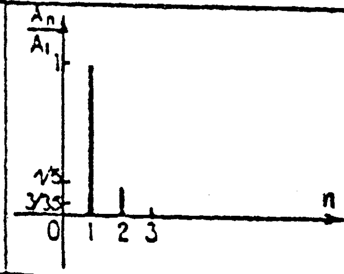
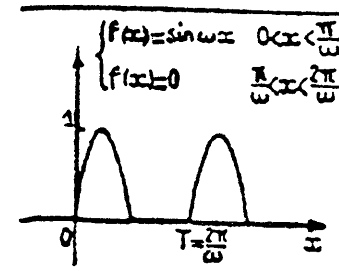
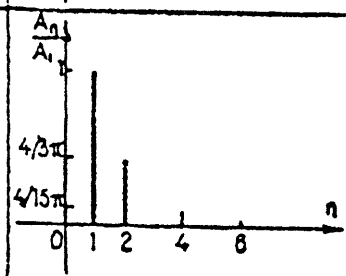
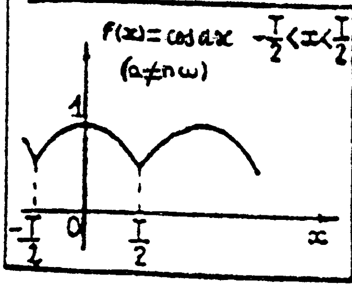
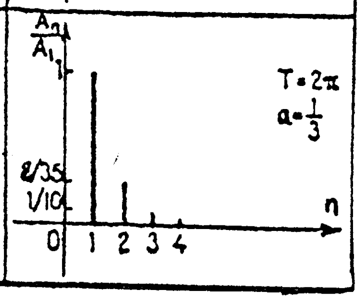
Ce diagramme en bâtons est appelé spectre de fréquence.

Il permet de visualiser l'importance des différents harmoniques qui entrent dans la composition du signal périodique étudié.

PROPRIETES DES COEFFICIENTS DE FOURIER

fonction	coefficient de rang n
$f(t)$	$C_n(f)$
$\lambda f(t) + \mu g(t)$	$\lambda C_n(f) + \mu C_n(g)$
$f(t-\tau)$	$e^{-in\omega\tau} C_n(f)$
$e^{in_0\omega t} f(t)$	$C_{n-n_0}(f)$
$f(-t)$	$C_{-n}(f)$
$\overline{f(t)}$	$\overline{C_{-n}(f)}$
$\frac{1}{T}\int_0^T f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau = f(t) * g(t)$	$C_n(f)\ C_n(g)$
$f(t)\ g(t)$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k(f)\ C_{n-k}(g)$

Fonction	*Série de Fourier*	*Spectre de fréquence*
	$$S_f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)\omega x}{2n+1}$$	
	$$S_f(x) = \frac{\tau}{T} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\omega\frac{\tau}{2}}{n}\cos n\omega x$$	
	$$S_f(x) = \frac{T}{4} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\omega x}{(2n+1)^2}$$	
	$$S_f(x) = \frac{T}{2} - \frac{2\pi}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\omega x}{n}$$	
	$$S_f(x) = \frac{T^2}{12} + \frac{T^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos n\omega x}{n^2}$$	

fonction	Série de Fourier	Spectre de fréquence
	$S_f(x) = \frac{T^2}{6} - \frac{T^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\omega x}{n^2}$	
	$S_f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\omega' x}{4n^2-1}$ $(\omega' = 2\omega)$	
	$S_f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\omega x}{4n^2-1}$	
	$S_f(x) = \frac{\sin a\frac{T}{2}}{\frac{T}{2}}\left[\frac{1}{a} + 2a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos n\omega x}{a^2-n^2\omega^2}\right]$	

1. Algèbre de Boole - Tribu

Définitions

soit Ω un ensemble et F une famille de sous-ensembles de Ω.
F est une algèbre de Boole ou un clan si :

1°/ F est non vide
2°/ $\forall P \in F$, $\complement_\Omega P \in F$

3°/ $\forall P_i \in F$, $\forall P_j \in F$, $P_i \cup P_j \in F$

F est une σ-algèbre de Boole ou une tribu si la propriété 3°/ est vraie pour toute réunion dénombrable d'ensembles P_i appartenant à F.

Conséquences de la définition d'une σ-algèbre :
ϕ et Ω appartiennent nécessairement à F ; toute intersection dénombrable d'éléments de F appartient encore à F.

Exemple 1 : l'ensemble de toutes les parties d'un ensemble est une tribu

Exemple 2 : σ-algèbre engendrée par une famille $\mathcal{F}$ de parties de Ω

Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, il existe au moins une σ-algèbre qui contient $\mathcal{F}$: c'est $\mathcal{P}(\Omega)$.
Il est facile de vérifier que l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{F}$ est encore une tribu et que c'est la plus petite. On l'appelle tribu engendrée par $\mathcal{F}$.

Exemple 3 : dans $\mathbb{R}$, on considère la famille d'intervalles $]-\infty, a]$; la tribu engendrée par cette famille s'appelle tribu borélienne. On montre que tout intervalle semi-ouvert, ouvert, fermé, en particulier tout sous-ensemble $\{x\}$ réduit à un point, appartient à cette tribu.
$\rightarrow$ tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ intervenant en physique (réunions dénombrables de points ou d'intervalles) appartiennent à la tribu borélienne.

Exemple 4 : dans $\mathbb{R}^n$, la tribu borélienne est la tribu engendrée par la famille de sous-ensembles du type $]-\infty, a_1] \times \cdots \times]-\infty, a_n]$

2. Mesure sur une tribu

Définition :

Soit un ensemble Ω muni d'une tribu $\mathcal{B}$. Une mesure positive sur $\mathcal{B}$ est une application μ de $\mathcal{B}$ dans la demi-droite achevée $[0, +\infty]$ telle que :
a/ $\mu(\phi) = 0$

b/ pour toute famille dénombrable d'éléments disjoints de $\mathcal{B}$: $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} P_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(P_i)$

(remarque : on définit de la même manière une mesure complexe, mais nous n'utiliserons que des mesures positives).

Propriétés d'une mesure positive :
si $P_1 \subset P_2$, alors $\mu(P_1) \leq \mu(P_2)$ et $\mu(P_2 - P_1) = \mu(P_2) - \mu(P_1)$

Exemples :

a/ pour tout sous-ensemble P de Ω, on pose $\mu(P) = \infty$ si P a une infinité d'éléments et $\mu(P) = \text{card } P$ lorsque P est fini - On définit ainsi une mesure positive dite mesure de dénombrement (mesure sur $\mathcal{P}(\Omega)$).

b/ On fixe $a \in \Omega$ et on pose $\mu(P) = 1$ si $a \in P$, $\mu(P) = 0$ si $a \notin P$. Cette mesure sur $\mathcal{P}(\Omega)$ est appelée masse unité concentrée en a ou mesure de Dirac en a.

c/ La notion usuelle de longueur d'un segment conduit à prendre pour mesure d'un intervalle $]a, b]$ sur $\mathbb{R}$ la quantité : $\mu(]a,b]) = b - a$. On montre que cela suffit à définir sur la tribu borélienne une mesure appelée mesure de Lebesgue. Elle possède la propriété caractéristique d'être invariante par translation.
Un élément x de $\mathbb{R}$ est un ensemble de mesure nulle. Plus généralement, une réunion dénombrable d'éléments $x_i \in \mathbb{R}$ est un ensemble de mesure nulle.
(N.B. il existe des sous-ensembles non dénombrables de $\mathbb{R}$, de mesure nulle).
On généralise facilement la mesure de Lebesgue à $\mathbb{R}^n$.

Ensembles de mesure nulle

Ils jouent un rôle important en théorie de l'intégration.
Soit une tribu $\mathcal{B}$ munie d'une mesure μ et soit $P \in \mathcal{B}$. On dit qu'une propriété est vraie μ presque partout sur P si elle est vraie pour tout $x \in P$, sauf sur un ensemble de mesure nulle $N \subset P$.

exemples sur $\mathbb{R}$:
$f = 0$ μ-p.p. sur $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $f(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R} - N$ où N est un ensemble de mesure nulle
$f = g$ μ-p.p. sur $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $f(x) = g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R} - N$ " " " " " " " "

f_n converge vers f μ-p.p. sur $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R} - N$

Dans ce type de convergence, on admet qu'il n'y ait pas convergence en certains points, à condition que ces points forment un ensemble de mesure nulle.

3. Fonctions mesurables

Un ensemble Ω muni d'une tribu $\mathcal{B}$ est dit espace mesurable. Les éléments de $\mathcal{B}$ sont appelés les ensembles mesurables de Ω.

Définition

Soient $(\Omega, \mathcal{B})$ et $(\Omega', \mathcal{B}')$ 2 espaces mesurables. Une application f de Ω dans Ω' est mesurable si pour tout $P' \in \mathcal{B}'$, $f^{-1}(P') \in \mathcal{B}$.

Dans tout ce qui suit $\Omega' = \mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$.
Exemple pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne
f mesurable $\Leftrightarrow$ pour tout a, $f^{-1}(]-\infty, a])$ appartient à la tribu Borélienne.

Propriétés :
- pour f et g à valeurs dans $\mathbb{R}$ mesurables, $f+g$, λf, fg, $\sup(f,g)$, f^+, f^-, $|f|$ sont mesurables
- pour f et g à valeurs complexes, mesurables, $f+g$, fg, $\mathrm{Re} f$, $\mathrm{Im} f$, $|f|$, λf sont mesurables
- la composée de 2 applications mesurables est mesurable

On retiendra simplement que toutes les fonctions rencontrées en physique sont mesurables.

Fonction mesurable étagée positive

C'est une fonction mesurable, à valeurs dans $[0,+\infty[$, qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs distinctes.

Théorème On démontre que toute fonction mesurable à valeurs dans la demi-droite achevée $[0,+\infty]$ est la limite simple d'une suite croissante de fonctions mesurables positives étagées.

4. Intégration

4.1. Intégration des fonctions mesurables positives

$\mathbb{R}^+$ est muni de la tribu borélienne.
Ω est muni d'une tribu $\mathcal{B}$ sur laquelle on a défini une mesure μ.
En pratique : $\Omega = \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}$ = tribu borélienne sur $\mathbb{R}^n$.
On définit d'abord l'intégrale d'une fonction étagée mesurable positive φ.
$\varphi : \Omega \longrightarrow [0,+\infty[$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs $y_1, \dots, y_n$.

On note E_i l'ensemble des $x \in \Omega$ tels que $\varphi(x) = y_i$.
Puisque φ est mesurable $E_i = \varphi^{-1}(\{y_i\}) \in \mathcal{B}$ et $\mu(E_i)$ est bien défini.

Par définition, l'intégrale de φ, notée $\int_\Omega \varphi \, d\mu$, vaut :

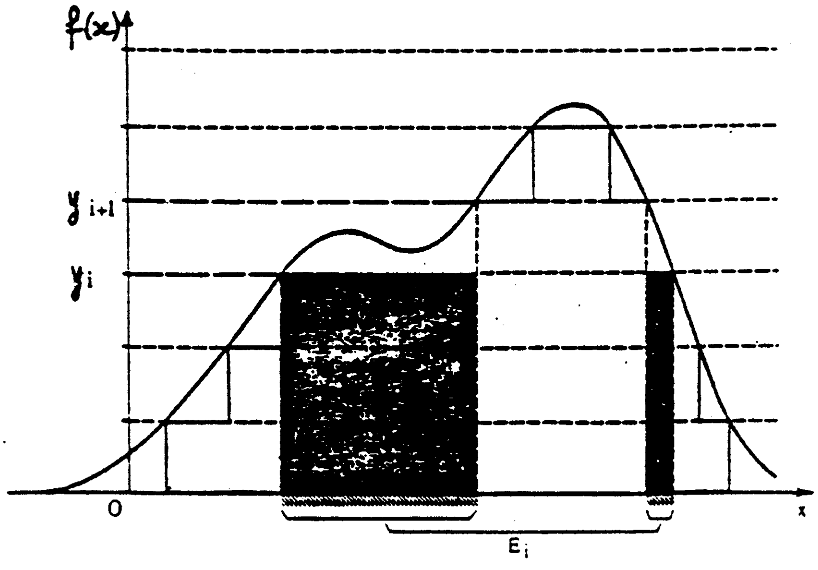
$$\int_\Omega \varphi \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} y_i \; \mu(E_i)$$

Remarque : $\mu(E_i) \in [0,+\infty]$; il peut donc arriver que $\mu(E_i) = \infty$ et qu'en même temps $y_i = 0$.
On utilise la convention : $0.\infty = 0$ (pour les règles de calcul dans $[0,+\infty]$ se reporter en page 4, § 4.3).

Intégrale de f mesurable : $\Omega \to [0,+\infty]$
Le théorème précédent nous conduit à définir :

$$\int_\Omega f \, d\mu = \sup \int_\Omega \varphi \, d\mu$$

la borne supérieure étant prise sur toutes les fonctions mesurables étagées positives telles que $0 \leq \varphi \leq f$.
L'intégrale de f est un nombre positif qui peut être infini.



L'intégrale d'une fonction mesurable positive s'obtient à partir d'un découpage des ordonnées en un nombre fini de valeurs distinctes y_i. On multiplie alors y_i par la mesure $\mu(E_i)$ de l'ensemble E_i des x tels que $y_i < f(x) < y_{i+1}$

L'intégrale que l'on vient de définir s'appelle intégrale de Lebesgue de f sur Ω, relativement à la mesure μ.

Propriété importante : si $0 \leq f \leq g$, alors $\int_\Omega f \, d\mu \leq \int_\Omega g \, d\mu$

4.2. Intégration des fonctions à valeurs réelles ou complexes

Définition d'une fonction sommable

Une fonction f à valeurs réelles ou complexes est dite sommable (ou intégrable au sens de Lebesgue) si :
a/ f est mesurable   b/ $\int_\Omega |f| d\mu$ est fini

Définition de l'intégrale d'une fonction sommable

si f est à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$, on écrit $f = f^+ - f^-$ ($f^+ \geq 0$ et $f^- \geq 0$)

on définit : $\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega f^+ d\mu - \int_\Omega f^- d\mu$

N.B. puisque $f^+ \leq |f|$ et $f^- \leq |f|$, $\int_\Omega f \, d\mu$ est fini

si f est à valeurs complexes, $f = f_1 + i f_2$ et $\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega f_1 \, d\mu + i \int_\Omega f_2 \, d\mu$

($\int_\Omega f \, d\mu$ est fini puisque $f_1^+ \leq |f_1| \leq |f|$, $f_1^- \leq |f_1| \leq |f|$; même chose pour f_2)

Remarque : une fonction mesurable peut être sommable pour μ_1 et non sommable pour μ_2.
Exemple : $\exp x$ n'est pas sommable pour la mesure de Lebesgue, mais elle est sommable pour la mesure de Dirac en a (montrer que l'intégrale vaut $\exp a$).

Lorsqu'on utilise la mesure de Lebesgue (définie page 2), l'intégrale est notée $\int_\Omega f \, dx$ ou $\int_\Omega f(x) \, dx$.

Intégrale sur un sous-ensemble

Soit E un sous-ensemble mesurable de Ω, c.à.d. un élément de la tribu $\mathcal{B}$.
On dit que f est sommable sur E si la fonction :

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pour } x \in E \\ 0 & \text{pour } x \notin E \end{cases}$$

est sommable sur Ω et on pose, par définition $\int_E f \, d\mu = \int_\Omega f_0 \, d\mu$

4.3 Arithmétique dans $[0, +\infty]$

Tout au long de la théorie de l'intégration, on rencontre le symbole ∞. Une première raison est que l'on souhaite intégrer sur la droite réelle dont la mesure est infinie. Une autre raison est que la limite d'une suite de fonctions positives peut atteindre la valeur $+\infty$ en certains points et l'on perdrait l'élégance de certains énoncés de théorèmes si on devait distinguer ces mauvais cas.
Les règles de calculs sont :

$$a + \infty = \infty + a = +\infty \quad \text{si } 0 \leq a \leq +\infty$$

$$a \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{si } 0 < a \leq +\infty \\ 0 & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

Il peut sembler étrange de défini $0\cdot(+\infty)=0$. Toutefois on pourra vérifier sans difficulté que cette définition conserve, sans restriction, la commutativité, l'associativité et la distributivité des lois sur $[0,+\infty]$.
Par contre, les règles de simplification doivent être examinées plus soigneusement:
$a+b=a+c$ entraîne $b=c$ seulement lorsque a est fini
$ab=ac$ entraîne $b=c$ seulement lorsque $0<a<\infty$

5. Propriétés de l'intégrale de Lebesgue

On considère un ensemble Ω, muni d'une tribu $\mathcal{B}$ sur laquelle on a défini une mesure positive μ.
E et F désignent des ensembles appartenant à $\mathcal{B}$.
Les fonctions f, g sont supposées définies sur Ω, à valeurs réelles ou complexes et mesurables.

a/ Si f et g sont sommables sur E, alors $\alpha f+\beta g$ est sommable sur E.

$$\forall\alpha\in\mathbb{C},\ \forall\beta\in\mathbb{C}\qquad \int_E(\alpha f+\beta g)=\alpha\int_E f\,d\mu+\beta\int_E g\,d\mu$$

L'ensemble de fonctions sommables sur E est un espace vectoriel noté $\mathcal{L}^1(E)$

b/ f sommable sur $E \Leftrightarrow |f|$ sommable sur E ; de plus $\left|\int_E f\,d\mu\right|\leq\int_E|f|\,d\mu$

c/ soient f et g deux fonctions réelles telles que $|f|\leq g$; alors, si g est sommable sur E, f est sommable sur E et $\int_E|f|\,d\mu\leq\int_E g\,d\mu$

d/ Si $E\subset F$ et si $f\geq 0$, alors $\int_E f\,d\mu\leq\int_F f\,d\mu$

e/ L'intégrale d'une fonction f, sur un ensemble $N\in\mathcal{B}$ de mesure nulle, est nulle (même si $f(x)$ est infini pour tout $x\in N$)

f/ Si une fonction f réelle vérifie $m\leq f(x)\leq M$ pour tout $x\in E$ et si $\mu(E)<+\infty$, alors f est sommable sur E et vérifie:

$$m\,\mu(E)\leq\int_E f\,d\mu\leq M\,\mu(E)$$

g/ Si $f\geq 0$, alors $\int_E f\,d\mu=0 \Leftrightarrow f=0$ μ-p.p. sur E

h/ Si f et g sont μ-presque partout égales sur E et si f est sommable sur E, alors g est sommable et $\int_E f\,d\mu=\int_E g\,d\mu$

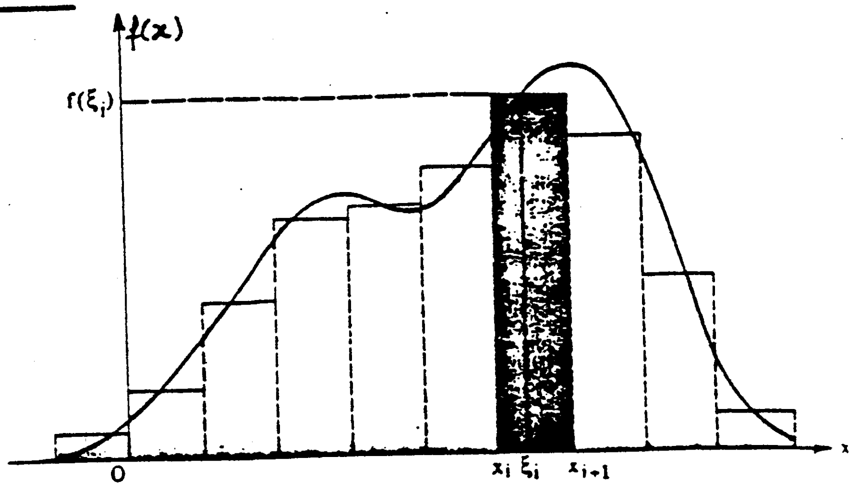
Cette dernière propriété montre que, pour le calcul d'une intégrale sur E, il n'est pas utile de distinguer les fonctions μ-presque partout égales.
On définit donc des classes d'équivalence de fonctions μ-p.p. égales.

Notation: $L^1(E)$ désigne l'espace vectoriel des classes de fonctions sommables sur E.

Dans ce qui suit: $\Omega=\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}$ est la tribu borélienne sur $\mathbb{R}^n$; μ est la mesure de Lebesgue. L'intégrale de Lebesgue est alors notée $\int f\,dx$.

Comparaison avec l'intégrale de Riemann

L'intégrale de Riemann est définie à partir d'un découpage de l'axe des abscisses en un nombre fini de valeurs distinctes x_i. On multiplie alors $(x_{i+1}-x_i)$ par $f(\xi_i)$, avec $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$.



On démontre les résultats suivants :

α/ si f est bornée et Riemann-intégrable sur $[a,b]$, alors elle est Lebesgue-intégrable sur $[a,b]$ et les deux intégrales coïncident

β/ la réciproque de cette propriété est fausse, comme le prouve ce contre-exemple

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour tout } x \text{ rationnel appartenant à } [a,b] \\ 0 & \text{pour tout } x \text{ irrationnel appartenant à } [a,b] \end{cases}$$

Cette fonction n'est pas Riemann-intégrable ; elle est Lebesgue-intégrable et son intégrale est nulle.

γ/ soit f bornée sur $[a,b]$;
f est Riemann-intégrable sur $[a,b] \iff f$ est continue presque partout sur $[a,b]$ (au sens de la mesure de Lebesgue)
On voit que les fonctions Riemann-intégrables sont soumises à des conditions de continuité assez contraignantes.

δ/ la propriété α/ est encore vraie pour toute fonction admettant une intégrale de Riemann impropre <u>absolument convergente</u>, mais elle est fausse pour les intégrales de Riemann <u>semi-convergentes</u> (c'est-à-dire pour les intégrales impropres convergentes, mais non absolument convergentes)

Les propriétés α/ et δ/ prouvent que l'intégrale de Lebesgue généralise l'intégrale de Riemann (sauf pour les intégrales de Riemann impropres, semi-convergentes).

<u>Notation</u> : pour $\Omega = \mathbb{R}$ et $E = [a,b]$, l'intégrale de Lebesgue $\int_{[a,b]} f\,dx$ est notée $\int_a^b f(x)\,dx$, avec <u>$a < b$</u>, pour que sa valeur coïncide avec la valeur de l'intégrale de Riemann lorsque celle-ci existe.

Intégrales de Riemann semi-convergentes

C'est le cas, par exemple, de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Cette intégrale de Riemann impropre est convergente, tandis que $\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ ne converge pas.

La fonction $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ n'admet pas d'intégrale de Lebesgue sur $[0,+\infty[$ car $|f(x)|$ n'est pas sommable (propriété β/).

6. Les théorèmes importants

Le gros avantage de la théorie de Lebesgue réside dans la facilité avec laquelle on peut effectuer beaucoup de passages à la limite. De ce point de vue, les deux théorèmes de convergence qui suivent constituent la partie centrale de la théorie.

Dans ce paragraphe $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}$ est la tribu borélienne et on utilise la mesure de Lebesgue.

Théorème de convergence monotone de Lebesgue

E désigne un ensemble appartenant à la tribu borélienne $\mathcal{B}$ de Ω.
Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions mesurables telles que

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \cdots \leq f_n(x) \leq \cdots \qquad \forall x \in E$$

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) \text{ presque partout sur } E, \text{ quand } n \to +\infty$$

Alors, f est mesurable et $\lim_{n \to +\infty} \int_E f_n \, dx = \int_E f \, dx$

Théorème de convergence dominée de Lebesgue

Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions mesurables, à valeurs dans $\mathbb{C}$ telles que

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) \text{ presque partout sur } E, \text{ quand } n \to +\infty \, ;$$

s'il existe une fonction g sommable telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in E$, $|f_n(x)| \leq g(x)$, alors :

1°/ f est sommable

2°/ $\lim_{n \to +\infty} \int_E |f_n - f| \, dx = 0$ (on dit que f_n converge en moyenne vers f)

3°/ $\lim_{n \to +\infty} \int_E f_n \, dx = \int_E f \, dx$ (on peut intervertir le passage à la limite et l'intégration)

Remarque : lorsque ces théorèmes sont applicables à une intégrale de Riemann, ils permettent de faire l'économie de la convergence uniforme.

Théorème de Fubini

Il existe de nombreux énoncés de ce théorème ; nous donnons celui qui est le plus utilisé en pratique et nous l'énonçons dans $\mathbb{R}^2$.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, mesurable. Son intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^2$ est notée $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) \, dx \, dy$.

Si l'une des trois intégrales suivante est finie :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)| \, dx \, dy \qquad \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x,y)| dx \right] dy \qquad \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x,y)| \, dy \right] dx$$

il en est de même des deux autres et on a l'égalité :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) \, dx \, dy = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x,y) \, dx \right] dy = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x,y) \, dy \right] dx$$

Il est bien sûr possible d'appliquer le théorème de Fubini à une intégrale du type $\iint_E f(x,y) \, dx \, dy$ où $E \subset \mathbb{R}^2$ appartient à la tribu borélienne de $\mathbb{R}^2$.
Cela revient en effet à calculer $\iint_{\mathbb{R}^2} f_0(x,y) \, dx \, dy$ avec $f_0(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \in E \\ 0 & \text{si } (x,y) \notin E \end{cases}$

Théorème de changement de variable dans $\mathbb{R}^n$

Soit $T \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi : T \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que φ est bijective de T dans $\varphi(T) = X \subset \mathbb{R}^n$.
φ est donc la donnée de n fonctions $x_i = \varphi_i(t_1, \dots, t_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$.
On suppose les φ_i continues, à dérivées partielles premières continues dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant T. On note $J(t)$ le déterminant Jacobien de φ.

$$J(t) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_1} & \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_n} \end{vmatrix} \qquad J \neq 0$$

Alors, pour que $f(x)$ soit sommable sur X il faut et il suffit que $f(\varphi(t))\,|J(t)|$ soit sommable sur T et on a :

$$\iint \cdots \int_X f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n = \iint \cdots \int_T f[\varphi_1(t_1, \dots, t_n), \dots, \varphi_n(t_1, \dots, t_n)]\, |J(t)|\, dt_1 \dots dt_n$$

7. Espaces L^1, L^2, L^2_σ

On a déjà défini $L^1(E)$, ensemble des classes de fonctions $f : E \to \mathbb{C}$, sommables, c.à.d. mesurables et telles que $\int_E |f|\, d\mu < \infty$. C'est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.
On définit de la même manière $L^2(E)$, ensemble des classes de fonctions de carré sommable, c.à.d. mesurables et telles que $\int_E |f|^2 d\mu < \infty$. C'est aussi un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. En effet :

$$\left.\begin{array}{l} |f+g|^2 = (f+g)\overline{(f+g)} = (f+g)(\bar f + \bar g) = |f|^2 + |g|^2 + 2\,\mathrm{Re}(f\bar g) \\ |f-g|^2 = (f-g)(\bar f - \bar g) \geqslant 0 \iff |f|^2 + |g|^2 \geqslant 2\,\mathrm{Re}(f\bar g) \end{array}\right\} \text{ donc } |f+g|^2 \leq 2(|f|^2 + |g|^2)$$

(propriétés : voir chapitre III)

7.4. Espaces $L^2_\sigma([a,b])$

A partir de la mesure de Lebesgue μ, on construit une nouvelle mesure φ de la manière suivante.
Soit $\sigma(x)$ une fonction sommable sur $[a,b]$, μ-p.p. strictement positive sur $[a,b]$.
Pour tout sous-ensemble E de $[a,b]$, appartenant à la tribu Borélienne, on pose $\varphi(E) = \int_E \sigma(x)\,dx$

On démontre que :
- l'application φ ainsi définie est une mesure positive
- pour toute fonction g sommable relativement à la mesure φ, son intégrale de Lebesgue vaut : $\int_{[a,b]} g\, d\varphi = \int_{[a,b]} g(x)\sigma(x)\, dx$

On dit que la mesure φ est le produit de la mesure de Lebesgue par la densité σ et on note : $d\varphi = \sigma\, dx$.
L'ensemble noté $L^2_\sigma([a,b])$ est l'espace vectoriel des "classes d'équivalence pour l'égalité φ-p.p." des fonctions f telles que $\int_a^b |f|^2 d\varphi < +\infty$.
C'est aussi l'espace vectoriel des "classes d'équivalence pour l'égalité μ-p.p." des fonctions f telles que $\int_a^b |f(x)|^2 \sigma(x)\, dx < +\infty$.

Remarque : $f \in L^2_\sigma([a,b]) \iff f\sqrt{\sigma} \in L^2([a,b])$.

Espaces de Hilbert - Opérateurs

1. Espaces métriques

distance
Un espace métrique est un ensemble E sur lequel on definit une distance d, application de $E \times E$ dans $\mathbf{R}^+$, qui vérifie

$$d(x,x)=0 \quad , \quad d(x,y)=d(y,x) \quad , \quad d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z).$$

convergence : suite convergente pour d
$x_n \to x$ quand $n \to \infty$, si $d(x_n,x) \to 0$ quand $n \to \infty$.

suite de Cauchy:
$(x_n)_n$ est une suite de Cauchy si $d(x_p,x_q) \to 0$ quand $p \to \infty, p<q$.

espace métrique complet
Théorème: toute suite convergente est de Cauchy.
L'inverse est faux pour un espace métrique quelconque.
Un espace métrique dans lequel toute suite de Cauchy converge est dit complet.

continuité d'une application d'un espace métrique (E,d) dans un espace métrique (F,δ)
Une application f est continue de E dans F si, pour toute suite $(x_n)_n$ qui converge vers $x \in E$, alors la suite $\left(f(x_n)\right)_n$ converge vers $f(x) \in F$; c'est-à-dire: si $d(x_n,x) \to 0$ quand $n \to \infty$, alors $\delta\left(f(x_n),f(x)\right) \to 0$ quand $n \to \infty$.

métriques sur des espaces fonctionnels
exemple: ensemble E des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$;
on peut définir plusieurs distances:

* $d_1(f,g)=\sup\limits_{x\in[0,1]}\left|f(x)-g(x)\right|$ (convergence uniforme)
* $d_2(f,g)=\int_0^1\left|f(x)-g(x)\right|dx$ (convergence en moyenne)
* $d_3(f,g)=\sqrt{\int_0^1\left|f(x)-g(x)\right|^2dx}$ (convergence en moyenne quadratique)

remarque: la notion de convergence simple ne dérive pas d'une distance.

2. Espaces vectoriels normés

E est un *espace vectoriel* sur **K** (**R** ou **C**).
Une *norme* est une application de E dans $\mathbf{R}^+$, qui vérifie
$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad ; \quad \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\| \quad , \quad \forall x \in E \quad , \quad \forall \lambda \in \mathbf{K},$
$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad , \quad \forall x \in E, \forall y \in E.$

De l'inégalité triangulaire on déduit
$|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x+y\|$ et $|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x-y\|$.

<u>*distance induite par la norme*</u>
$d(x,y) = \|x-y\|$ (vérifier les axiomes de distance).

2.1. convergence

<u>*Suites convergentes pour la norme définie dans E*</u>
On dit qu'une suite $(x_n)_n$ converge vers $x \in E$, pour la norme définie dans *E*, si $\|x_n - x\| \to 0$ quand $n \to \infty$.

<u>*Suites absolument convergentes*</u>
On dit qu'une suite $(x_n)_n$ converge absolument vers $x \in E$, si $\|x_n\| \to \|x\|$ quand $n \to \infty$; autrement dit si $|\,\|x_n\| - \|x\|\,| \to 0$ quand $n \to \infty$.
Attention: la convergence d'une suite implique la convergence absolue en vertu de $|\,\|x_n\| - \|x\|\,| \leq \|x_n - x\|$, mais la réciproque est fausse (contre-exemple une suite $(x_n)_n$ n'ayant pas de limite et telle que $\|x_n\| = 1$ pour tout n).

Espace vectoriel normé, réel, de dimension finie: exemple $\mathbf{R}^n$; il est complet.

Espaces fonctionnels normés; exemples.
Ω est un espace vectoriel (en général $\mathbf{R}^n$), muni d'une tribu $\mathcal{B}$ sur laquelle on a défini une mesure μ. E est un élément de $\mathcal{B}$.
$L^1(E)$ est l'ensemble des classes de fonctions $f: E \to \mathbf{C}$ *sommables*, c'est-à-dire telles que $\int_E |f|\, d\mu < \infty$. C'est un espace vectoriel sur **C**.
On définit une norme : $\|f\|_1 = \int_E |f| d\mu$ et à partir de cette norme la notion de convergence en moyenne. $L^1(E)$ est *complet* pour cette norme.
N.B. $\|f\|_1$ n'est pas une norme dans $\mathcal{L}^1(E)$.

$L^2(E)$ est l'ensemble des classes de fonctions $f: E \to \mathbf{C}$ *de carré sommables,* c'est-à-dire telles que $\int_E |f|^2 \, d\mu < \infty$. C'est un espace vectoriel sur **C**.

On définit une norme : $\|f\|_2 = \sqrt{\int_E |f|^2 \, d\mu}$ et à partir de cette norme la notion de convergence en moyenne quadratique. $L^2(E)$ est *complet* pour cette norme.

$L^2_\sigma([a,b])$ est l'ensemble des classes de fonctions $f: [a,b] \to \mathbf{C}$ telles que $\int_a^b |f|^2 \sigma(x)\, dx < +\infty$ avec $\sigma(x) > 0 \quad \forall x \in [a,b]$.
La racine carrée de cette intégrale définit une norme et rend cet espace *complet.*

Quel est le rapport entre ces diverses notions de convergence, par exemple dans $L^1(E)$?
a) convergence uniforme
b) convergence simple
c) convergence presque partout (mesure de Lebesgue)
d) convergence en moyenne

$a) \Rightarrow b) \Rightarrow c)$;
$b) \Rightarrow a)$ est faux , $c) \Rightarrow b)$ est faux ;
$a) \Rightarrow d)$ si on intègre sur un pavé borné E de $\mathbf{R}^n$;

en effet $\int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx \leq (b-a) \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)|$;

$a) \Rightarrow d)$ n'est pas vraie pour un ensemble E quelconque;
$b) \Rightarrow d)$ est faux, même si on intègre sur un pavé borné de $\mathbf{R}^n$;
$d) \Rightarrow c)$ est faux .

Y a-t-il des relations d'inclusion entre $L^1(E)$ et $L^2(E)$?
* si $E = \mathbf{R}$, $L^1(\mathbf{R})$ n'est pas contenu dans $L^2(\mathbf{R})$, $L^2(\mathbf{R})$ n'est pas contenu dans $L^1(\mathbf{R})$ et l'intersection de ces deux ensembles n'est pas vide;
en effet, $f(x) = e^{-x^2} \in L^1(\mathbf{R})$ et $\in L^2(\mathbf{R})$; $g(x) = |x|^{-1/2} e^{-x^2} \in L^1(\mathbf{R})$ et $\notin L^2(\mathbf{R})$; $h(x) = (x^2+1)^{-1/2} \notin L^1(\mathbf{R})$ et $\in L^2(\mathbf{R})$.
* si $E=[a,b]$, alors $L^2([a,b]) \subset L^1([a,b])$ et l'inclusion est stricte.
Démonstration: $(|f| - |g|)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2|f|\,|g| \leq |f|^2 + |g|^2$;
on choisit $g=1$ qui est bien dans $L^2([a,b])$; alors, $2|f| \leq |f|^2 + 1$ et donc si f est de carré sommable sur $[a,b]$, alors f est sommable sur $[a,b]$.

2.2. Applications linéaires d'un espace vectoriel normé E dans un espace vectoriel normé F: $\mathcal{L}(E, F)$.

En physique, on utilise le mot **opérateur**, pour une application linéaire d'un espace vectoriel dans lui-même.
Si l'espace vectoriel *F* est **R** ou **C**, on utilise en mathématique le terme "forme" linéaire. Si l'espace vectoriel *E* est un espace de fonctions et si *F* est **R** ou **C**, on parle de "fonctionnelle" linéaire.

Applications linéaires continues

La linéarité permet une caractérisation simple de la continuité.

Proposition: Soient *E* et *F* deux espaces vectoriels normés et *f* une application linéaire de *E* dans *F*, alors les trois énoncés suivants sont équivalents
1) *f* est continue
2) *f* est bornée sur toute partie bornée de *E*
3) il existe une constante $k > 0$ telle que, $\forall x \in E, \|f(x)\| \leq k \|x\|$.

Démonstration
1) ⇒ 2)
La continuité en 0 implique qu'il existe une boule ouverte de centre 0 et de rayon r dans *E* telle que pour tout x de cette boule $\|f(x) - f(0)\| = \|f(x)\| < 1$.
Par homothétie , $\forall x \in E$ tel que $\|x\| < A$, alors $\|f(x)\| < A / r$.
2) ⇒ 3)
La sphère unité S est bornée; il existe donc une constante $k > 0$ telle que, $\forall x \in S$, $\|f(x)\| \leq k$. Soit un élément x quelconque de E et $x_1 = x / \|x\|$; alors $\|f(x_1)\| \leq k$ et par suite $\|f(x)\| \leq k\|x\|$.
3) ⇒ 1)
En effet , si $\|x_n - x\| \to 0$, alors $\|f(x_n - x)\| \leq k\|x_n - x\| \to 0$.

Norme d'une application linéaire ***continue***

$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\| = \sup_{\|x\| = 1} \|f(x)\|$ (cette quantité est finie).
$\|f\|$ est la plus petite constante $k > 0$ telle que $\|f(x)\| \leq k\|x\|$; en particulier on peut donc écrire $\|f(x)\| \leq \|f\| \, \|x\|$.

Lorsque les normes sur E et F sont précisées, la norme de f que l'on vient de définir est la norme usuelle. Elle est commode pour la simplicité de sa définition et aussi pour la propriété suivante: soient E, F, G trois espaces vectoriels normés, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$; alors $\|g \circ f\| \leq \|g\| \, \|f\|$.
En effet $\|(g \circ f)(x)\| \leq \|g\| \, \|f(x)\| \leq \|g\| \, \|f\| \, \|x\|$.

3. Espaces vectoriels munis d'un produit scalaire. Espaces de Hilbert .

Pour un espace vectoriel sur **R** , on définit un produit scalaire réel (exemple: l'espace vectoriel euclidien $\mathbf{R}^n$).

Soit maintenant un espace vectoriel E sur **C.**
Un produit scalaire est une application $E \times E \to \mathbf{C}$ qui vérifie:

$$(x+y,z) = (x,z)+(y,z) \quad , \quad (x,y+z) = (x,y)+(x,z)$$

$$(ax,y) = a(x,y) \quad , \quad (x,ay) = \bar{a}(x,y) \quad , \quad (x,y) = \overline{(y,x)}$$

$$(x,x) \geq 0 \quad \forall x \in E \quad , \quad (x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 .$$

On en déduit

$|(x,y)| \leq \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}$ inégalité de Schwarz

$\sqrt{(x+y,x+y)} \leq \sqrt{(x,x)} + \sqrt{(y,y)}$ inégalité de Minkovski

$2|(x,y)| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Le produit scalaire induit une norme $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$
et une distance $d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{(x-y,x-y)}$.

Propriétés de la norme et du produit scalaire

$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ (interprétation géométrique),

$4(x,y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\,\|x+iy\|^2 - i\,\|x-iy\|^2$

(le produit scalaire est entièrement déterminé par la connaissance de la norme).

Orthogonalité.
On dit que deux vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul. Le seul vecteur orthogonal à lui-même est le vecteur nul.
On dit que deux parties A et B de E sont orthogonales, si tout vecteur de A est orthogonal à tout vecteur de B. Deux ensembles orthogonaux n'ont en commun que le vecteur nul.

Théorème de Pythagore: pour x et y orthogonaux, on a $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
Dans un espace vectoriel sur **C**, la réciproque du théorème de Pythagore est fausse.

Exemple de produit scalaire: $L^2([a,b])$ avec $(f,g) = \int_a^b f(t)\,\overline{g(t)}\,dt$.
Cette expression définit un produit scalaire car
$2|f\bar{g}| = 2|f|\,|\bar{g}| = 2|f|\,|g| \leq |f|^2 + |g|^2$; elle est donc finie quand $|f|^2, |g|^2$ sont finis.
On vérifie bien la propriété $(f,f) = 0 \Leftrightarrow \int_a^b |f(x)|^2\,dx = 0 \Leftrightarrow |f| = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

3.1. Définition et exemples

Un espace de Hilbert H est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire et ***complet*** *pour la distance qui dérive du produit scalaire.*

exemple 1

L'espace vectoriel l_2 des suites $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, $x_i \in \mathbf{C}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty$, est un espace de Hilbert pour la distance qui dérive du produit scalaire $(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \bar{y}_n$.

exemples 2

* $L^2([a,b])$ est un espace de Hilbert pour $(f,g) = \int_a^b f(t)\,\overline{g(t)}\,dt$.

* $L^2(\mathbf{R})$ est un espace de Hilbert pour $(f,g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\overline{g(t)}\,dt$.

* $L^2_\sigma([a,b])$ est un espace de Hilbert pour $\int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,\sigma(x)\,dx$;
(mesure définie par une densité $\sigma(x) > 0$).

* $L^2(T)$, ensemble des fonctions T-périodiques, de carré sommable, muni du produit scalaire $(f,g) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\overline{g(t)}\,dt$ est un espace de Hilbert
Remarque: l'expression ci-dessus est un produit scalaire dans $L^2(T)$, mais pas dans $\mathcal{L}^2(T)$.

3.2. Bases Hilbertiennes

3.2.1. Base dans un espace vectoriel de dimension finie

C'est un système générateur $\{e_i\}_{i\in I}$, constitué d'un nombre fini de vecteurs linéairement indépendants. La décomposition de tout vecteur sur une base est unique. S'il existe un produit scalaire, on peut définir une base orthonormée. Lorsqu'une famille est orthogonale, elle est nécessairement libre.
Alors $(x,y) = x_1\overline{y_1} + \cdots + x_n\overline{y_n}$, avec $x_i = (x,e_i)$ et $y_j = (y,e_j)$.

3.2.2 Base algébrique dans un espace vectoriel *E* de dimension infinie

C'est une famille *libre*, <u>*infinie*</u> $\{e_i\}_{i\in I}$ d'éléments de E telle que tout élément de E s'écrit comme combinaison linéaire <u>*finie*</u> de e_i.

exemple 1
espace vectoriel des polynômes de la variable réelle x. C'est un espace vectoriel de dimension infinie;
base algébrique: $\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$. $P(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$.
exemple 2
espace vectoriel des polynômes trigonométriques, à valeurs complexes, de période T, muni du produit scalaire $(P,Q) = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\,\overline{Q(t)}\,dt$; c'est un espace vectoriel de dimension infinie; base algébrique *orthonormée* : $\{e^{in\omega t}\}_{n\in\mathbf{Z}}$; tout polynôme trigonométrique est combinaison linéaire *finie* des $e^{in\omega t}$; le produit scalaire s'écrit aussi comme somme *finie*.

Toutes les fonctions T-périodiques ne peuvent pas s'écrire comme combinaisons linéaires *finies* des $e^{in\omega t}$. Toutefois, elles peuvent peut-être s'écrire comme combinaisons linéaires *infinies;* comment? avec quelle notion de convergence ?

3.2.3. Base Hilbertienne ou famille <u>orthonormée totale</u> de H

H est un espace de Hilbert. Une famille *infinie* $\{e_i\}_{i\in I}$ d'éléments de H est orthonormée et totale Ssi
a) $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ (orthonormée)
b) le seul élément de H orthogonal à tous les e_i est le vecteur nul (totale).

Pour tout $X \in H$, $x_i = (X, e_i)$ est appelée $i^{ème}$ coordonnée de X.
Remarque: la famille I des indices n'est pas nécessairement dénombrable.

Résultats importants

* On démontre que la condition b) est équivalente à dire que l'espace vectoriel engendré par les e_i est dense dans H; autrement dit, tout élément de H est limite de combinaisons linéaires *finies* de e_i.
* Tout espace de Hilbert admet une base hilbertienne.

Définition: Si H admet une base $\{e_i\}_{i \in I}$ dénombrable, l'espace H est dit *séparable*.

3.2.4. Théorème des bases hilbertiennes

Le théorème est énoncé pour un espace de Hilbert séparable, c'est-à-dire pour $I = \mathbf{N}$ ou $I = \mathbf{Z}$, mais il reste vrai dans le cas où la base n'est pas dénombrable.

Soit $\{e_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ une base hilbertienne de H,
et $X \in H$, $Y \in H$, $x_n = (X, e_n)$, $y_n = (Y, e_n)$. Alors:

a1) la série $\sum_n x_n e_n$ converge vers X au sens de la métrique définie par le produit scalaire; ce résultat signifie que

$$\lim_{N \to \infty} \left\| \sum_{n=0}^{N} x_n e_n - X \right\|^2 = \lim_{N \to \infty} \left(\sum_{n=0}^{N} x_n e_n - X, \sum_{n=0}^{N} x_n e_n - X \right) = 0$$

a2) la série numérique $\sum_n |x_n|^2$ converge dans $\mathbf{R}$ vers $\|X\|^2$;

a3) la série $\sum_n x_n \overline{y_n}$ est convergente dans $\mathbf{C}$, et sa somme vaut (X, Y);

b) réciproquement, soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la série numérique $\sum_n |x_n|^2$ converge dans $\mathbf{R}$; alors $\sum_n x_n e_n$ converge vers un élément de H qui est l'unique vecteur X tel que $(X, e_n) = x_n$.

3.2.5. Théorème de Riesz-Fischer

Tous les espaces de Hilbert séparables sont isomorphes à l_2.

C'est une conséquence du théorème précédent.
Démonstration.
L'espace vectoriel l_2 possède une base hilbertienne dénombrable. Soit $X \in H$ espace de Hilbert; on définit ses coordonnées $x_n = (X, e_n)$ qui vérifient d'après le théorème des bases hilbertiennes $\sum |x_n|^2$ converge; à tout $X \in H$, on fait ainsi correspondre un élément de l_2. Cette application est linéaire, injective et surjective à cause du b) du théorème des bases hilbertiennes.

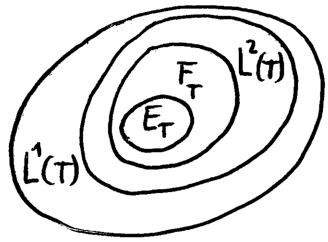
Tous les espaces de Hilbert cités précédemment sont séparables.

3.2.6. Séries de Fourier dans $L^2(T)$

** E_T est l'espace vectoriel des fonctions T-périodiques bornées, à valeurs dans **C**, intégrables au sens de Riemann sur un intervalle-période.
** F_T est l'espace vectoriel des fonctions T-périodiques bornées, à valeurs dans **C**, dont le carré du module est intégrable au sens de Riemann sur un intervalle-période.
On rappelle que si f est bornée sur $[a,b]$:

f Riemann- intégrable $\Rightarrow |f|$ Riemann- intégrable $\Rightarrow |f|^2$ Riemann- intégrable

et que la réciproque est fausse. Il s'ensuit que $E_T \subset F_T$.
** $L^1(T)$ est l'espace vectoriel des classes de fonctions T-périodiques, à valeurs dans **C**, sommables au sens de Lebesgue sur un intervalle-période.
** $L^2(T)$ est l'espace vectoriel des classes de fonctions T-périodiques, à valeurs dans **C**, de carré sommables au sens de Lebesgue sur un intervalle-période.
On sait que $L^2([a,b]) \subset L^1([a,b])$.
Les quatre espaces vectoriels précédents vérifient donc les inclusions suivantes:
$E_T \subset F_T \subset L^2(T) \subset L^1(T)$.



Dans le premier chapitre, la théorie des séries de Fourier a été développée dans E_T. Une théorie analogue peut être construite dans $L^1(T)$; la question naturelle est alors : pour toute fonction de $L^1(T)$, sa série de Fourier converge-t-elle en moyenne vers f ? Il n'en est rien. De plus $L^2(T) \subset L^1(T)$ et le théorème de Parseval n'est pas vérifié pour toutes les fonctions de $L^1(T)$.

Convergence d'une série de Fourier en moyenne quadratique dans $L^2(T)$

Un ensemble bien adapté à la théorie des séries de Fourier est $L^2(T)$. C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $(f,g) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\overline{g}(t)dt$.

Les fonctions $\left\{ e_n(t) = exp\left(in\,\frac{2\pi}{T} t \right)\right\}_{n\in \mathbf{Z}}$ constituent une famille orthonormée de $L^2(T)$. On démontre qu'elle est <u>totale</u>. C'est donc une base hilbertienne. La composante de rang n est $(f,e_n) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, exp\left(-in\frac{2\pi}{T}t\right)dt$, i.e. le coefficient de Fourier de rang n.

La propriété des $(e_n)_{n\in \mathbf{Z}}$ d'être un système total signifie que si une fonction de $L^2(T)$ est orthogonale à tous les e_n, alors elle est nulle; par conséquent, si f a tous ses coefficients de Fourier nuls, elle est presque partout nulle sur un intervalle-période. La réciproque est évidemment vraie. On en déduit que, pour f et g dans $L^2(T)$:

$$f=g \text{ presque partout sur un intervalle-période} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbf{Z},\quad c_n(f) = c_n(g) .$$

Le théorème des bases hilbertiennes fournit dans $L^2(T)$ les résultats suivants:

a1) la série de Fourier de f, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{in\omega t}$, converge vers f au sens de la norme définie dans $L^2(T)$, c'est-à-dire <u>*en moyenne quadratique*</u>

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^T \left| \sum_{n=-N}^{+N} c_n(f)e^{in\omega t} - f(t)\right|^2 dt = 0 \ ;$$

a2) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|c_n(f)\right|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \left|f\right|^2 dt$ (théorème de Parseval) ;

a3) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\,\overline{c_n(g)} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\overline{g}(t)dt$ (théorème de Parseval) ;

b) si $(c_n)_{n\in \mathbf{Z}}$ est une suite de nombres complexes telle que la série numérique $\sum_n \left|c_n\right|^2$ converge dans **R**, alors $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$ converge en moyenne quadratique vers une fonction $f \in L^2(T)$ et f est l'unique fonction de $L^2(T)$ admettant les c_n comme coefficients de Fourier.

4. Dual topologique d'un espace de Hilbert

Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbf{C}$. A tout vecteur u de H, on associe la forme linéaire $\tilde{u}$ définie comme suit:

$$H \to \mathbf{C}$$
$$v \xrightarrow{\tilde{u}} \tilde{u}(v) = (v,u).$$

On dit que $\tilde{u}$ est la forme linéaire associée au vecteur u. L'ensemble des formes linéaires $\tilde{u}$, lorsque u parcourt H, constitue un espace vectoriel noté H^*. On définit sur H^* un produit scalaire de la manière suivante:

$$(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) = (u_2, u_1) = \overline{(u_1, u_2)}\ .$$

H^*, muni de ce produit scalaire est un espace de Hilbert.
Il est facile de vérifier que l'application

$$H \to H^*$$
$$u \to \tilde{u}$$

est bijective et antilinéaire.

Si $\{e_n\}_n$ est une base hilbertienne de H, $\{\tilde{e}_n\}_n$ est une base hilbertienne de H^*. De plus, si $\lambda_n = (u, e_n)$ est la $n^{ième}$ composante du vecteur u, alors $\overline{\lambda}_n$ est la $n^{ième}$ composante de $\tilde{u}$:

$$u = \sum_n \lambda_n e_n \quad , \quad \tilde{u} = \sum_n \overline{\lambda}_n \tilde{e}_n\ ;$$

(théorème des bases hilbertiennes).

On démontre le résultat important suivant:
Théorème. Le dual H^* coïncide avec l'ensemble des formes linéaires <u>continues</u> de H dans $\mathbf{C}$.

C'est la raison pour laquelle on l'appelle dual topologique de H.

La norme d'une application linéaire a été définie plus haut. On peut vérifier que les trois normes suivantes sont égales: la norme de u dans H, la norme de $\tilde{u}$ dans H^* et la norme de $\tilde{u}$ comme forme linéaire continue de H dans $\mathbf{C}$

$$\|\tilde{u}\| = \sup_{v, \|v\|=1} |(v,u)| = \|\tilde{u}\|_{H^*} = \|u\|_H\ .$$

5. Opérateurs dans H (application linéaires de H dans H)

5.0. Lemme préliminaire

Si pour tout $x \in H$, $(x, y) = (x, z)$ alors $y = z$.
Ce résultat est utile pour démontrer l'égalité de deux opérateurs dans les résultats qui suivent.

5.1. Opérateur A^+ adjoint de l'opérateur A (ou hermitique conjugué)

Soit $A: H \to H$. L'adjoint A^+ de A est un opérateur, défini sur H entier qui vérifie:

$$(Au, v) = (u, A^+ v) \quad \forall u \in H, \forall v \in H \ .$$

Propriétés

$$(A^+)^+ = A \quad , \quad (\lambda A)^+ = \bar{\lambda} A^+ \quad , \quad (A+B)^+ = A^+ + B^+ \quad , \quad (AB)^+ = B^+ A^+ .$$

Exemple de démonstration : $(\lambda A)^+ = \bar{\lambda} A^+$.
Par définition de l'adjoint, on a $\forall v \in H, \forall u \in H$,

$$\big((\lambda A)v, u\big) = (v, (\lambda A)^+ u) = (\lambda(Av), u) = \lambda(Av, u) = \lambda(v, A^+ u) = (v, \bar{\lambda} A^+ u).$$

La deuxième et la dernière expressions sont égales, $\forall v \in H$. On en déduit $(\lambda A)^+ u = \bar{\lambda} A^+ u$, $\forall u \in H$, ce qui signifie que $(\lambda A)^+ = \bar{\lambda} A^+$.

5.2. Opérateur auto-adjoint (ou hermitique ou hermitien)

C'est un opérateur A qui est son propre adjoint

$$A = A^+ \quad \Leftrightarrow \quad A^+ u = Au \quad \forall u \in H.$$

Attention au cas où le domaine de définition n'est pas H entier.

Propriétés.
a) les valeurs propres sont réelles
b) les vecteurs propres relatifs à 2 valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

Démonstration.
a) Soit v vecteur propre associé à la valeur propre λ : alors $Av = \lambda v$.
$(v, Av) = \overline{(Av, v)} = (A^+ v, v) = (Av, v)$; donc (Av, v) est un nombre réel.
$(Av, v) = (\lambda v, v) = \lambda(v, v) \quad \Rightarrow \quad \lambda$ est réel, puisque (v, v) est réel.

b) Soient v et w deux vecteurs propres associés respectivement à deux valeurs propres distinctes λ, μ.

$(Av, w) = (\lambda v, w) = \lambda(v, w) = (v, A^+ w) = (v, Aw) = (v, \mu w) = \bar{\mu}(v, w) = \mu(v, w)$.

$\Rightarrow \quad (\lambda - \mu)(v, w) = 0 \quad \Rightarrow \quad (v, w) = 0$.

5.3. Opérateur unitaire

C'est un opérateur U tel que: $U^+ U = 1 \quad \Leftrightarrow \quad U^{-1} = U^+$.
Propriétés.
- Le produit de deux opérateurs unitaires est unitaire.
- Le produit de deux opérateurs hermitiens est hermitien si et seulement si les deux opérateurs commutent.

5.4 Opérateurs qui commutent

Soient deux opérateurs A et B tels que $AB = BA$.
Si v est vecteur propre de B avec la valeur propre β et si le sous-espace propre relatif à β est de dimension 1, alors v est aussi vecteur propre de A.

Démonstration.
Soit v un vecteur propre de B. Alors: $Bv = \beta v$.
$ABv = A\beta v = BAv$ puisque les opérateurs commutent.
Donc, $B(Av) = \beta(Av)$, ce qui veut dire que (Av) est vecteur propre de B.
Si le sous-espace propre relatif à β est de dimension 1, alors $Av = \alpha v$.

5.5. Projecteurs

Un projecteur est un opérateur P tel que $P^2 = P = P^+$.

Propriétés.
1°) P est continu et de norme 1;

2°) $Q = 1 - P$ est un projecteur;

3°) soit $H_P = \{Px, x \in H\}$; on vérifie que $H_P = \{x \in H / Px = x\}$;

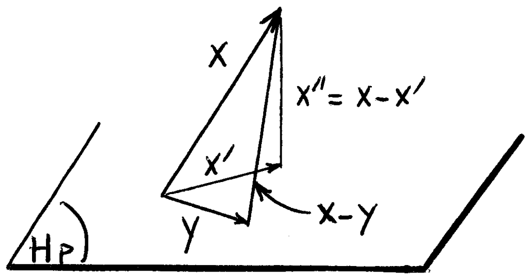
4°) si $H_Q = \{Qx, x \in H\}$, $K_P = \{z \in H, Pz = 0\}$, alors $H_P^\perp = H_Q = K_P$;

5°) $H = H_P \oplus H_P^\perp$ et $(H_P^\perp)^\perp = H_P$;

6°) conséquences

On note $X' = PX$ et $X'' = QX$. Les définitions de P et Q impliquent:

a) $\|X\|^2 = \|PX\|^2 + \|QX\|^2 = \|X'\|^2 + \|X''\|^2$;



b) X' est le seul élément de H_P tel que pour tout $Y \in H_P$, $(Y,X) = (Y,X')$
c'est-à-dire $(Y, X - X') = 0$;
ce qui signifie que tout vecteur de H_P est orthogonal à ;
on dit que $X' = PX$ est la *projection orthogonale* de X sur le sous-espace H_P;

c) X' est le seul élément de H_P tel que pour tout $Y \in H_P$,
$\|X' - X\| \leq \|Y - X\|$;
on dit que $X' = PX$ est la meilleure approximation de X par un vecteur de H_P, ou encore que c'est la meilleure approximation au sens des moindres carrés.

On interprétera les résultats qui précèdent à l'aide du dessin ci-dessus. Ces résultats montrent qu'on peut "faire de la géométrie" dans un espace de Hilbert.

7°) $P_n : u \to (u, e_n) e_n$ est un projecteur;

$\forall i \neq j \quad P_i P_j = 0$;

$P_N = \sum_{n=1}^{N} P_n$ est encore un projecteur ;

$\sum_n P_n = 1$ (relation de "fermeture"; voir démonstration § 6.2.3).

6. Le formalisme de Dirac de la mécanique quantique

Le cadre mathématique

L'axiome de départ est le suivant : l'ensemble des états possibles d'un système quantique peut être représenté par un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

* un vecteur u de $\mathcal{H}$ représente un état quantique
* le produit scalaire (u, v) représente une amplitude de probabilité
* à toute variable dynamique est associée une application linéaire $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ (on utilise plutôt le terme d'opérateur).

Attention ! en mécanique quantique, le produit scalaire est pris linéaire par rapport à v et antilinéaire par rapport à u :

$$(u, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 (u, v_1) + \lambda_2 (u, v_2)$$
$$(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) = \bar{\lambda}_1 (u_1, v) + \bar{\lambda}_2 (u_2, v)$$

La forme linéaire $\tilde{u}$, conjuguée de u, est alors définie par : $\tilde{u}(v) = (u, v)$

On note $\{e_n\}_n$ une base de $\mathcal{H}$.

Remarque : lorsque c'est possible, on choisit comme base de l'espace de Hilbert une famille de vecteurs propres d'un ensemble d'observables (opérateurs hermitiques) qui commutent.

Le formalisme de Dirac est une simple retranscription des résultats des paragraphes 1. 2. 3. 4. dans une écriture astucieuse et très commode d'utilisation.

* un vecteur u de $\mathcal{H}$ est noté $|u\rangle$
* les vecteurs de la base $\{e_n\}_n$ sont notés $|n\rangle$
* la forme linéaire $\tilde{u}$ est notée $\langle u|$

L'égalité $\tilde{u}(v) = (u, v)$ devient :

$$\langle u| \, (|v\rangle) = (u, v)$$

Pour simplifier, on omet les parenthèses et on écrit : $\langle u|v\rangle = (u, v)$.

Ainsi $\langle u|v\rangle$ désigne $\begin{cases} \text{soit le produit scalaire des 2 vecteurs } |u\rangle \text{ et } |v\rangle \\ \text{soit l'action de la forme linéaire } \langle u| \text{ sur le vecteur } |v\rangle \end{cases}$

6.1. Théorème des bases hilbertiennes

La $n^{\text{ième}}$ composante d'un vecteur u, pour le produit scalaire précédent, vaut :
$\lambda_n = (e_n, u) = \langle n|u\rangle$

a$_1$/ $\sum_n \lambda_n e_n$ converge dans $\mathcal{H}$ vers u, ce qui s'écrit :

$$\sum_n |n\rangle\langle n|u\rangle = |u\rangle$$

De même, dans $\mathcal{H}^*$: $\sum_n \langle u|n\rangle\langle n| = \langle u|$

a_2/ La série numérique $\sum_n |\lambda_n|^2$ converge vers $\|u\|^2$. On écrit :

$$\|u\|^2 = \sum_n |\langle n|u\rangle|^2 = \sum_n \langle u|n\rangle\langle n|u\rangle = \|\tilde{u}\|^2$$

a_3/ $\langle u|v\rangle = \sum_n \langle u|n\rangle\langle n|v\rangle$ (convergence de la série vers le produit scalaire $\langle u|v\rangle$)

6.2. Opérateurs

soit un opérateur A (application linéaire de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$) : $u \longmapsto Au$

Avec les notations de Dirac, on écrit : $|u\rangle \longmapsto A|u\rangle = |Au\rangle$

6.2.1 Opérateur adjoint de A

C'est l'opérateur A^+ qui vérifie :

$$\langle A^+u|v\rangle = \langle u|Av\rangle = (\langle u|)(A|v\rangle) \underset{\uparrow}{=} \langle u|A|v\rangle$$

(en supprimant les parenthèses)

L'application antilinéaire A_d, de $\mathcal{H}^*$ dans $\mathcal{H}^*$, $\tilde{u} \longmapsto \widetilde{A^+u}$ vérifie :

$$(A_d\,\tilde{u})(v) = \widetilde{A^+u}\,(v) = \langle A^+u|v\rangle = \langle u|A\,v\rangle = \langle u|A|v\rangle$$

Il est donc commode de la noter : $\langle u| \longmapsto \langle u|A$

En conclusion, $\langle u|A|v\rangle$ désigne à la fois :

* le produit scalaire des vecteurs $|u\rangle$ et $|Av\rangle$
* le produit scalaire des vecteurs $|A^+u\rangle$ et $|v\rangle$
* l'action de la forme linéaire $\langle u|$ sur le vecteur $|Av\rangle$
* l'action de la forme linéaire $\langle u|A$ sur le vecteur $|v\rangle$

6.2.2 Opérateurs $|a\rangle\langle b|$

soit $|a\rangle \in \mathcal{H}$ et $\langle b| \in \mathcal{H}^*$. On définit l'application linéaire ϕ_a^b :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H} \\ |u\rangle &\longmapsto \phi_a^b|u\rangle = |a\rangle\langle b|u\rangle \end{aligned}$$

C'est pourquoi cet opérateur est noté par Dirac $|a\rangle\langle b|$, de sorte que :

$(|a\rangle\langle b|)(|u\rangle) = |a\rangle\langle b|u\rangle$ (suppression des parenthèses).

Propriétés

A partir de la définition, il est facile de démontrer que :

$$(|a\rangle\langle b|)^+ = |b\rangle\langle a|$$

A et B étant deux opérateurs linéaires de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$, on peut les composer avec $|a\rangle\langle b|$. On obtient les relations (à vérifier):

$$A \circ |a\rangle\langle b| = |Aa\rangle\langle b|$$

$$|a\rangle\langle b| \circ B = |a\rangle\langle B^+ b| = |a\rangle\langle b|B$$

$$(|a\rangle\langle b|)\circ(|a'\rangle\langle b'|) = |a\rangle\langle b|a'\rangle\langle b'|$$

Enfin, la dernière égalité de (16) implique :

$$(A \circ |a\rangle\langle b| \circ B)^+ = (A|a\rangle\langle b|B)^+ = B^+|b\rangle\langle a|A^+$$

Parmi les opérateurs $|a\rangle\langle b|$, ceux de type $|a\rangle\langle a|$ sont hermitiques.

On voit que : $(|a\rangle\langle a|)\circ(|b\rangle\langle b|) = |a\rangle\langle a|b\rangle\langle b|$ n'est pas hermitique, sauf si $\langle a|b\rangle = 0$

6.2.3 Projecteurs et relation de fermeture

L'application linéaire $P_n : u \mapsto (e_n, u)\, e_n$ c.a.d. $|u\rangle \mapsto |n\rangle\langle n|u\rangle$ projette sur le sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$ engendré par e_n.

On note : $P_n = |n\rangle\langle n|$

$P_n P_n = P_n^2 = |n\rangle\langle n|n\rangle\langle n| = |n\rangle\langle n| = P_n = P_n^+$ (voir § précédent)

Pour $i \neq j$: $P_i P_j = |i\rangle\langle i|j\rangle\langle j| = 0$.

On en déduit que $\mathbb{P}_N = \sum_{n=1}^{N} P_n$ est encore un projecteur (vérifier que $\mathbb{P}_N^2 = \mathbb{P}_N^+ = \mathbb{P}_N$). Cet opérateur projette sur le sous-espace vectoriel engendré par $|1\rangle, |2\rangle, \dots, |N\rangle$.

Montrons que $\mathbb{P}_N$ tend vers l'opérateur $\mathbb{1}$, lorsque $N \to +\infty$, au sens de la norme définie sur les applications linéaires au paragraphe 4.1.

$$\|(\mathbb{P}_N - \mathbb{1})|u\rangle\|^2 = \langle(\mathbb{P}_N - \mathbb{1})u \,|\, (\mathbb{P}_N - \mathbb{1})u\rangle$$

$$= \langle \mathbb{P}_N u | \mathbb{P}_N u\rangle + \langle u|u\rangle - \langle \mathbb{P}_N u|u\rangle - \langle u|\mathbb{P}_N u\rangle$$

$$= \langle u|\mathbb{P}_N u\rangle + \langle u|u\rangle - \langle u|\mathbb{P}_N u\rangle - \langle u|\mathbb{P}_N u\rangle$$

$$= \langle u|u\rangle - \langle u|\mathbb{P}_N u\rangle$$

$$= \langle u|u\rangle - \langle u|\sum_{n=1}^{N}|n\rangle\langle n|u\rangle\rangle = \langle u|u\rangle - \sum_{n=1}^{N}\langle u|n\rangle\langle n|u\rangle$$

Or, le théorème des bases hilbertiennes (résultat a_2) affirme que la série $\sum_{n=1}^{N}\langle u|n\rangle\langle n|u\rangle$ converge vers $\langle u|u\rangle$ lorsque $N \to +\infty$.

Il s'ensuit que $\|(\mathbb{P}_N - \mathbb{1})|u\rangle\| \to 0$ lorsque $N \to +\infty$

On écrit : $\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}_N = \sum_n |n\rangle\langle n| = \mathbb{1}$ (relation de fermeture).

6.2.4 Application linéaire dans un sous-espace vectoriel de dimension finie N

L'opérateur A est alors représenté par une matrice carrée $N \times N$

$|u\rangle$ par une matrice à une colonne et N lignes
$\langle u|$ par une matrice à une ligne et N colonnes

$\langle m|A|n\rangle = A_{mn}$ est l'élément situé à la ligne m, dans la colonne n

$(A^+)_{mn} = \overline{A_{nm}}$

6.2.5 La relation d'incertitude

Elle concerne deux opérateurs hermitiques A et B qui ne commutent pas.

On suppose que $[A,B] = AB - BA = iC$ (où C est hermitique).
Soit $|u\rangle$ un vecteur de norme 1.
On note :

$$\langle A\rangle = \langle u|A|u\rangle \qquad \langle B\rangle = \langle u|B|u\rangle$$
$$A' = A - \langle A\rangle \mathbb{1} \qquad B' = B - \langle B\rangle \mathbb{1}$$
$$(\delta A)^2 = \langle A'^2\rangle = \langle u|A'^2|u\rangle \qquad (\delta B)^2 = \langle B'^2\rangle = \langle u|B'^2|u\rangle$$
$$\delta A > 0 \qquad \delta B > 0$$

On vérifiera que : $[A', B'] = iC$

$$\begin{aligned}(\delta A)^2 = \langle u|A'^2|u\rangle &= \langle u|(A - \langle A\rangle \mathbb{1})^2|u\rangle \\ &= \langle u|A^2|u\rangle - 2\langle A\rangle\langle u|A|u\rangle + \langle A\rangle^2\langle u|u\rangle \\ &= \langle u|A^2|u\rangle - 2\langle A\rangle^2 + \langle A\rangle^2 = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2\end{aligned}$$

On rappelle (voir cours de mécanique quantique) que $\langle A\rangle$ s'interprète comme la valeur moyenne de l'opérateur A pour un système quantique dans l'état $|u\rangle$.

La relation d'incertitude s'obtient en calculant $\|(A' + i\lambda B')u\|^2$, avec $\underline{\lambda \text{ réel}}$.

$$\begin{aligned}\|(A'+i\lambda B')u\|^2 &= \langle (A'+i\lambda B')u \,|\, (A'+i\lambda B')u\rangle \\ &= \langle A'u|A'u\rangle + i\lambda\langle A'u|B'u\rangle - i\lambda\langle B'u|A'u\rangle + \lambda^2\langle B'u|B'u\rangle \\ &= \langle u|A'^2|u\rangle + i\lambda\langle u|A'B'u\rangle - i\lambda\langle u|B'A'u\rangle + \lambda^2\langle u|B'^2|u\rangle \\ &= \lambda^2\langle B'^2\rangle + i\lambda\langle u|(A'B' - B'A')u\rangle + \langle A'^2\rangle \\ &= \lambda^2\langle B'^2\rangle - \lambda\langle C\rangle + \langle A'^2\rangle\end{aligned}$$

Le premier membre de l'égalité représente un nombre positif ou nul quel que soit λ, puisque c'est une norme.
Le trinôme du 2ème degré en λ vérifie cette condition si et seulement si son discriminant est négatif ou nul :

$$\langle C\rangle^2 - 4\langle A'^2\rangle\langle B'^2\rangle \leq 0$$

$$(\delta A)^2(\delta B)^2 \geq \frac{1}{4}\langle C\rangle^2$$

$$\boxed{(\delta A)(\delta B) \geq \frac{1}{2}|\langle C\rangle|}$$

Pour l'interprétation physique, on se reportera au cours de mécanique quantique.

IV. La transformation de Fourier des fonctions d'une variable réelle

1. Introduction

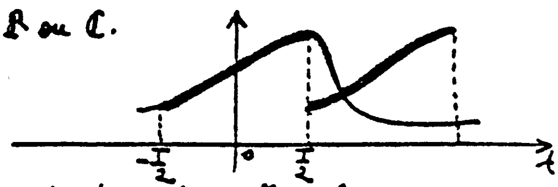
Dans le 1er chapitre, on s'est intéressé à des signaux $g(t)$ T-périodiques. Sous certaines hypothèses, on a pu les décomposer en somme de signaux sinusoïdaux de périodes $\frac{T}{n}$ (fréquences $\frac{n}{T}$) : $g(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n \frac{2\pi t}{T} - \varphi_n)$.

Le terme de fréquence $1/T$ est le fondamental ; les termes de fréquence n/T $(n \geq 2)$ sont les harmoniques. Le diagramme en bâtons représentant les coefficients de Fourier A_n en fonction de n s'appelle le spectre de g : il montre l'importance des harmoniques entrant dans la composition du signal g.

Pour un signal non périodique, on peut se demander quelles sont les différentes fréquences qui composent le signal et quelles sont leurs importances respectives. L'approche intuitive qui suit montre comment on est naturellement conduit à passer de la notion de série de Fourier (spectre discret) à la notion de transformée de Fourier (spectre "continu" en fréquences).

Dans tout ce chapitre les intégrales sont des intégrales de Lebesgue.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, non périodique, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On note f_T la fonction T-périodique égale à f sur l'intervalle $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$.



Quand $T \to +\infty$, $f_T \to f$ uniformément sur tout intervalle fini.

Supposons que f_T soit développable en série de Fourier.

$$\begin{cases} f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f_T)\, e^{in\, 2\pi t/T} & (\alpha) \\ c_n(f_T) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-in\, 2\pi t/T}\, dt & (\beta) \end{cases}$$

L'idée est la suivante : lorsque la mesure de T est grande devant 1, si n varie d'une unité, $\frac{n}{T}$ varie peu.

Les valeurs de n pour lesquelles $\nu \leq n/T \leq \nu + \Delta\nu$, c'est-à-dire $\nu T \leq n \leq (\nu + \Delta\nu)T$ sont au nombre de $(T\Delta\nu)$ à une unité près.
Pour ces valeurs, t étant fixé, $\exp(i \frac{n}{T} 2\pi t)$ varie peu.

Dans (α), le paquet de termes $\sum_{\nu T \leq n \leq (\nu+\Delta\nu)T} c_n(f_T)\, e^{i2\pi \frac{n}{T} t}$ vaut approximativement :

$$(T\Delta\nu)\, e^{i2\pi\nu t}\, \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-i2\pi\nu t}\, dt = C(\nu)\, e^{i2\pi\nu t}\, \Delta\nu$$

en posant $C(\nu) = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-i2\pi\nu t}\, dt$.

La somme (α) peut s'écrire comme somme de tous les paquets de termes correspondant aux intervalles ... $[-2\Delta\nu, -\Delta\nu]$, $[-\Delta\nu, 0]$, $[0, \Delta\nu]$, $[\Delta\nu, 2\Delta\nu]$, $[2\Delta\nu, 3\Delta\nu]$ ...
Lorsque la période T tend vers l'infini, on arrive ainsi intuitivement aux formules :

$$\begin{cases} f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\nu)\, e^{i2\pi\nu t}\, d\nu & (\alpha') \\ C(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i2\pi\nu t}\, dt & (\beta') \end{cases}$$

2. Définitions et premiers exemples

2.1. Définitions

L'approche précédente conduit à définir pour $f : \mathbb{R} \longrightarrow \begin{cases}\mathbb{R}\\ \mathbb{C}\end{cases}$

$$\boxed{\tilde{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i2\pi\nu t}\, dt} \qquad (1)$$

Cette intégrale n'existe pas toujours. On rappelle que:

$f(t)e^{-i2\pi\nu t}$ sommable $\Leftrightarrow |f(t)e^{-i2\pi\nu t}|$ sommable $\Leftrightarrow |f(t)|$ sommable $\Leftrightarrow f(t)$ sommable.

Les fonctions utilisées par la suite seront toutes dans $L^1(\mathbb{R})$ que l'on notera L^1.

Si l'on pose $\omega = 2\pi\nu$, on définit une nouvelle fonction $\hat{f}$:

$$\boxed{\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt} \qquad (2)$$

$\hat{f}(\omega)$ est appelée transformée de Fourier de f, de même que $\tilde{f}(\nu)$.
On passe de $\hat{f}$ à $\tilde{f}$ par changement de variable: $\hat{f}(2\pi\nu) = \tilde{f}(\nu)$ et $\tilde{f}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = \hat{f}(\omega)$.

La présentation intuitive du paragraphe précédent nous amène à poser la question suivante:

a-t-on $\displaystyle f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\nu)\, e^{i2\pi\nu t}\, d\nu$? (3)

ou encore, par changement de variable ($\omega = 2\pi\nu$)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega \quad ? \qquad (4)$$

on définit les deux applications suivantes:

$\mathcal{F}$ appelée <u>transformation de Fourier</u> $\qquad f \xmapsto{\mathcal{F}} \mathcal{F}f = \hat{f}$

$$(\mathcal{F}f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$\overline{\mathcal{F}}$ appelée <u>transformation de Fourier inverse</u> $\qquad g \xmapsto{\overline{\mathcal{F}}} \overline{\mathcal{F}}g$

$$(\overline{\mathcal{F}}g)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

Si l'on remplace $g(\omega)$ par $\hat{f}(\omega)$: $\displaystyle (\overline{\mathcal{F}}\hat{f})(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$.

La question (4) se traduit alors ainsi:

si $\hat{f} = \mathcal{F}f$, a-t-on $\overline{\mathcal{F}}\hat{f} = f$, c'est-à-dire $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = f$?

Lorsque la réponse est positive, on dit que f vérifie le théorème d'inversion.

Malheureusement, et de la même manière que dans les séries de Fourier, le résultat n'est pas vrai pour toutes les fonctions de L^1 (voir § 4.3).

Analogie avec les séries de Fourier

séries de Fourier

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-in\omega t}\,dt$$

question: $f(t) = \sum_n c_n(f)e^{in\omega t}$?

$|c_n(f)|$ est l'amplitude de l'harmonique de rang n dans le signal $f(t)$

transformées de Fourier

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

question : $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$?

$|\hat{f}(\omega)|$ mesure l'importance de la composante ω dans la décomposition de f en une somme "continue" de "fréquences".

Remarques sur les définitions

Nous utiliserons les variables t et ω, pour la simplicité de l'écriture de l'exponentielle et aussi parce qu'elles sont le plus fréquemment employées. Leur inconvénient est de conduire à des définitions de $\mathcal{F}$ et $\bar{\mathcal{F}}$ non symétriques. Avec les variables t et ν on aurait défini deux applications ϕ et $\bar{\phi}$

$$(\phi f)(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i2\pi\nu t}\,dt \qquad (\bar{\phi} g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\nu)e^{i2\pi\nu t}\,d\nu$$

de sorte que pour une fonction f vérifiant l'égalité (3), $\bar{\phi}\phi f = f$.

On rencontre encore d'autres définitions de la transformée de Fourier.
D'une manière générale, si l'on pose $\omega = \alpha\omega'$ $(\alpha > 0)$, on définit:

$$\varphi(\omega') = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\alpha\omega' t}\,dt = \hat{f}(\alpha\omega') \qquad (5)$$

si la fonction f vérifie le théorème d'inversion, elle satisfait alors l'égalité:

$$f(t) = \frac{\alpha}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\omega')e^{i\alpha\omega' t}\,d\omega \;. \qquad (6)$$

Exemple

En mécanique quantique la fonction d'onde $f(x)$ d'une particule et l'amplitude de probabilité $\varphi(p)$ que cette particule ait une impulsion p sont liées par la relation:

$$\varphi(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ipx/\hbar}\,dx$$

$\varphi(p)$ est donc la T.F. de $f(x)$; si f vérifie le théorème d'inversion :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(p)e^{ipx/\hbar}\,dp \;.$$

Pour rendre les égalités (5) et (6) symétriques, il faut choisir comme définition de la T.F.

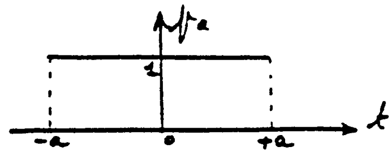
$$\psi(\omega') = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\alpha\omega' t}\,dt \qquad (5')$$

$$f(t) = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(\omega')e^{i\alpha\omega' t}\,d\omega' \qquad (6')$$

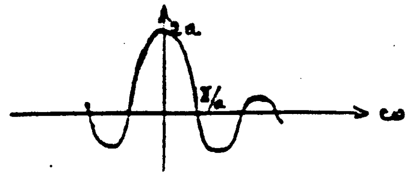
(exemple: $\alpha = 2\pi$, $\omega' = \nu$).

2.2 Premiers exemples

1°/ fonction "porte" p_a



$$p_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |t| < a \\ 0 & \text{si} \quad |t| > a \end{cases}$$

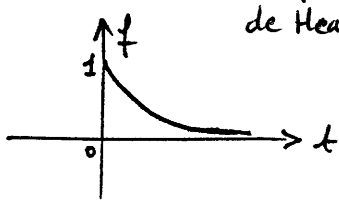


$$\mathcal{F}p_a(\omega) = \int_{-a}^{+a} e^{-i\omega t}\, dt = \frac{2 \sin a\omega}{\omega}$$

2°/ $f(t) = e^{-\alpha t}\, \theta(t) \qquad (\alpha > 0)$

où $\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$ (fonction appelée "échelon unité" ou fonction de Heaviside)

$$\mathcal{F}f(\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\, e^{-i\omega t}\, dt = \left[\frac{e^{-\alpha t} e^{-i\omega t}}{-(\alpha + i\omega)} \right]_0^{+\infty}$$



$|e^{-\alpha t} e^{-i\omega t}| = e^{-\alpha t} \to 0$ quand $t \to +\infty$

$$\mathcal{F}f(\omega) = \frac{1}{\alpha + i\omega}$$

3. Propriétés élémentaires de la T.F. d'une fonction appartenant à $L^1(\mathbb{R})$

3.0 $\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$ (aire algébrique comprise entre la courbe et l'axe $\overrightarrow{Ot}$)

3.1 Linéarité

$$\mathcal{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{F}f + \mu \mathcal{F}g$$

3.2 Parité. Imparité. Partie réelle. Partie imaginaire

La T.F. de $f(-t)$ est : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(-t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t}\, dt = \hat{f}(-\omega)$

Par suite, si f est paire ou impaire, il en est de même de $\hat{f}$.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f = f_1 + i f_2$ avec $f_1 = \mathrm{Re} f$ et $f_2 = \mathrm{Im} f$

et sa transformée de Fourier $\hat{f} = \hat{X} + i \hat{Y}$ ($\hat{X} = \mathrm{Re}\hat{f}$ et $\hat{Y} = \mathrm{Im}\hat{f}$).

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f_1 + i f_2)(\cos\omega t - i \sin\omega t)\, dt$$

$\hat{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f_1 \cos\omega t + f_2 \sin\omega t)\, dt \qquad \hat{Y}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f_2 \cos\omega t - f_1 \sin\omega t)\, dt$

Cas où la fonction f est à valeurs réelles ($f_2 = 0$)

$\hat{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos\omega t\, dt \qquad \hat{Y}(\omega) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin\omega t\, dt$

Il s'ensuit que $\hat{X}(\omega) = \hat{X}(-\omega)$ et $\hat{Y}(\omega) = -\hat{Y}(-\omega)$

[Lorsque f est réelle, sa transformée de Fourier a une partie réelle qui est une f^{ct} paire de ω et une partie imaginaire qui est une f^{ct} impaire de ω.

De plus:

si f est réelle paire, sa T.F. est une fonction réelle paire : $\hat{f}(\omega) = \hat{X}(\omega)$

si f est réelle impaire, sa T.F. est imaginaire pure, impaire : $\hat{f}(\omega) = i\hat{Y}(\omega)$

Exercice

soit f à valeurs réelles et $\hat{f} = \hat{X} + i\hat{Y}$ sa transformée de Fourier.

Calculer les T.F. de $f_p(t) = \dfrac{f(t)+f(-t)}{2}$ et $f_i(t) = \dfrac{f(t)-f(-t)}{2}$

3.3. Conjugaison

$$\mathcal{F}\bar{f}(\omega) = \overline{\mathcal{F}f(-\omega)} \qquad (\text{à vérifier})$$

3.4. Changement d'échelle

On cherche la T.F. de $g(t) = f(at)$ $(a \neq 0)$ $(a \in \mathbb{R})$

$$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(at)\, e^{-i\omega t}\, dt = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-i\frac{\omega}{a}u}\, du & \text{si } a>0 \\ -\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-i\frac{\omega}{a}u}\, du & \text{si } a<0 \end{cases}$$

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

En particulier, si $a = -1$, $\hat{g}(\omega) = \hat{f}(-\omega)$

3.5. Translation

on cherche la T.F. de $h(t) = f(t-a)$ $(a \in \mathbb{R})$

$$\hat{h}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-a)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-i\omega(u+a)}\, du$$

$$\hat{h}(\omega) = \hat{f}(\omega)\, e^{-i\omega a}$$

3.6. Modulation

On cherche la T.F. de $k(t) = f(t)\, e^{i\omega_0 t}$ $(\omega_0 \in \mathbb{R})$

$$\hat{k}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{i\omega_0 t}\, e^{-i\omega t}\, dt = \hat{f}(\omega - \omega_0)$$

Conclusion: à une translation de t dans le temps correspond un déphasage dans l'espace des fréquences, inversement, à une modulation de f correspond une translation sur les fréquences.

En général f est une fonction réelle et on la module par $\cos \omega_0 t$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos\omega_0 t\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2}\, dt = \frac{\hat{f}(\omega+\omega_0) + \hat{f}(\omega-\omega_0)}{2}$$

Donc, si

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(\omega)$$

$$f(t)\cos\omega_0 t \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2}\left(\hat{f}(\omega+\omega_0) + \hat{f}(\omega-\omega_0)\right)$$

4. Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

Dans tout ce paragraphe, les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sont sommables, c.à.d. mesurables et telles que $\int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt < \infty$.

Cette hypothèse implique que $\begin{cases} \text{Re} f \text{ et Im} f \text{ sont sommables} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \text{ est finie} \end{cases}$

4.1. Continuité et comportement à l'infini de la T.F.

1°/ $|\hat{f}(\omega)|$ est borné

$$|\hat{f}(\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) e^{-i\omega t}| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt = \|f\|_{L_1}$$

2°/ $\hat{f}$ est une fonction continue de ω

Démonstration : $\hat{f}$ continue en $\omega \iff$ pour toute suite (ω_n) qui tend vers ω, $\hat{f}(\omega_n) \to \hat{f}(\omega)$

Soit une suite ω_n qui converge vers ω.
On considère la suite de fonctions : $h_n(t) = f(t) e^{-i\omega_n t}$ $(n \in \mathbb{N})$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} h_n(t) \to h(t) = f(t) e^{-i\omega t} & \text{(continuité de l'exponentielle)} \\ |h_n(t)| = |f(t)| \end{cases}$

$\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$

Par hypothèse, f est sommable. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue affirme que :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n \to +\infty} h_n(t)\, dt$$

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega_n t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$\lim_{n \to +\infty} \hat{f}(\omega_n) = \hat{f}(\omega)$$

3°/ $\hat{f}(\omega) \to 0$ quand $|\omega| \to +\infty$ (admis)

Théorème 1
Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ est continue, bornée et tend vers zéro lorsque $|\omega| \to +\infty$

4.2. Dérivabilité et majorations

Théorème 2

Si f est n fois continûment dérivable et si ses dérivées d'ordre $k \leq n$ sont sommables, alors :

(7) $(\mathcal{F} f^{(k)})(\omega) = (i\omega)^k (\mathcal{F} f)(\omega) = (i\omega)^k \hat{f}(\omega)$ et $|\omega|^k |\hat{f}(\omega)| \leq \|f^{(k)}\|_{L_1}$ $(\forall k \leq n)$

Si $t^n f(t)$ est sommable, alors $\mathcal{F} f$ est n fois continûment dérivable ; de plus,

(8) $\mathcal{F}[(-it)^k f(t)] = (\mathcal{F} f)^{(k)} = (\hat{f})^{(k)}$ et $|(\hat{f})^{(k)}(\omega)| \leq \|t^k f(t)\|_{L_1}$ $(\forall k \leq n)$

Démonstration de la 1ère partie du théorème 2

* $f(t) \to 0$ quand $|t| \to +\infty$

En effet : f' sommable $\Leftrightarrow$ $|f'|$ sommable

$\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(t)|\, dt < +\infty \Rightarrow \int_0^{+\infty} |f'(t)|\, dt < +\infty$

Par conséquent $\int_0^{+\infty} f'(t)\, dt$ est fini.

$f(t) - f(0) = \int_0^t f'(u)\, du \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} f(t) = l$ (fini) d'après ce qui précède

Cette limite ne peut pas être $\neq 0$, sinon f n'est pas sommable.
même résultat pour $t \to -\infty$

* $\int_A^B f'(t)\, e^{-i\omega t} dt = \left[f(t)\, e^{-i\omega t} \right]_A^B + i\omega \int_A^B f(t)\, e^{-i\omega t} dt$

$\lim_{\substack{A \to -\infty \\ B \to +\infty}} \int_A^B f'(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) e^{-i\omega t} dt = i\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$

$\mathcal{F} f' = i\omega\, \mathcal{F} f$

De la même manière, on montre que $\mathcal{F} f'' = i\omega\, \mathcal{F} f'$

Donc : $\forall k \leq n \quad \mathcal{F} f^{(k)} = (i\omega)^k \mathcal{F} f$

$|(i\omega)^k \mathcal{F} f(\omega)| = |\mathcal{F} f^{(k)}(\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(k)}(t)\, e^{-i\omega t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f^{(k)}(t)|\, dt$

$|\omega|^k\, |\mathcal{F} f(\omega)| \leq \|f^{(k)}\|_{L_1}$

Pour $\omega \neq 0$ $\quad |\mathcal{F} f(\omega)| \leq \frac{1}{|\omega|^k} \|f^{(k)}\|_{L_1}$

On voit que <u>plus f est dérivable (avec des dérivées sommables), plus $\mathcal{F} f = \hat{f}$ décroît vite à l'infini.</u> (cf. le résultat analogue sur les coefficients de Fourier)

<u>Remarques</u> :
- la continuité des dérivées assure la validité de l'intégration par parties.
- sous l'hypothèse f dérivable et f' continue, on a démontré que $\hat{f}(\omega) \to 0$ pour $|\omega| \to +\infty$ puisque $|\hat{f}(\omega)| \leq \frac{1}{\omega} \|f'\|_{L_1}$
- mêmes résultats avec $\overline{\mathcal{F}}$ en remplaçant $(-i\omega)$ par $(i\omega)$

* la 2ème partie du théorème affirme que pour dériver $\hat{f}(\omega)$, on dérive l'intégrale de Fourier sous le signe $\int$.

Ce résultat est une conséquence du théorème de convergence dominée de Lebesgue.

$\hat{f}^{(k)}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-it)^k f(t) e^{-i\omega t} dt$

D'où la majoration : $|\hat{f}^{(k)}(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^k |f(t)|\, dt$

Ce qui signifie que : <u>plus f décroît vite à l'infini, plus $\hat{f}$ est dérivable (avec des dérivées bornées).</u>

4.3 Théorème de réciprocité ou d'inversion

On a défini $\hat{f}$ à partir de f. Est-il possible de reconstituer f à partir de $\hat{f}$?

Théorème 3 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ satisfaisant en outre à l'une des hypothèses suivantes :

a/ Sur tout intervalle $[a, b]$, f est à variation bornée

ou

b/ Sur tout intervalle $[a, b]$, f est C^1 par morceaux (i.e. f et f' sont continues par morceaux)

Alors : $$\lim_{A \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{+A} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{f(t+0) + f(t-0)}{2} \qquad (9)$$

Idée de la démonstration :

$$J_A(t) = \int_{-A}^{+A} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-A}^{+A} e^{i\omega t} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\omega u} du \right] d\omega$$
$$= \int_{-A}^{+A} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{i\omega(t-u)} du \right] d\omega = \int_{-A}^{+A} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+v) e^{-i\omega v} dv \right] d\omega$$

(on a posé : $u - t = v$)

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t+v) \left[\int_{-A}^{+A} e^{-i\omega v} d\omega \right] dv$$

On peut appliquer Fubini car $\int_{-A}^{+A} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)| du \right] d\omega$ est finie.

$$J_A(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2 f(t+v) \frac{\sin Av}{v} dv$$

J_A est une intégrale de Dirichlet. L'étude de ces intégrales est faite en détail dans Bass (tome I, p. 360).

On admettra le résultat suivant valable sous les hypothèses du théorème 3 :

$$\lim_{A \to +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t+v) \frac{\sin Av}{v} dv = \frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}$$

On en déduit immédiatement la conclusion du théorème.

Remarques

* mêmes hypothèses que pour les théorèmes de convergence des séries de Fourier ; conclusion analogue. $\left(S_f(t) = \frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0)) \right)$
* la conclusion du théorème 3 vaut pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, monotone par morceaux sur tout intervalle $[a, b]$ (car monotone par morceaux sur $[a, b] \Rightarrow$ à variation bornée sur $[a, b]$)
* Dans certains cas, la conclusion du théorème 3 se simplifie :

1°/ lorsque, en plus des hypothèses a/ ou b/ du théorème 3, f est continue, alors :

$$\lim_{A \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{+A} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = f(t)$$

Cette égalité résoud la question posée, puisqu'on calcule f à partir de $\hat{f}$.

2°/ Attention : $\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{+A} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$ peut avoir une limite quand $A \to +\infty$ sans que l'intégrale $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$ existe.

Si $\underline{\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})}$: $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega = \lim\limits_{A\to+\infty} \int_{-A}^{+A} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$;

on sait de plus (théorème 1) que : $g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$ est continue ;

la conclusion du théorème 3 devient : $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega = \frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$

3°/ Si f vérifie les hypothèses a/ ou b/ du théorème 3 et si elle est continue, si de plus $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega = f(t) \quad \text{autrement dit : } \hat{f} = \mathcal{F}f \text{ et } f = \overline{\mathcal{F}}\hat{f}$$

* On peut énoncer un autre théorème d'inversion, à la fois plus simple et moins précis (pour le calcul de f) que le précédent.

Si f et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ et si $g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$, alors g est continue (théorème 1) et $f(t) = g(t)$ presque partout ; c.à.d. $\hat{f} = \mathcal{F}f$ et $f = \overline{\mathcal{F}}\hat{f}$ p.p.

on en déduit que pour $\hat{f} \in L^1$, son original de Fourier est unique dans L^1.

* interprétation physique

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\nu)\, e^{i 2\pi \nu t}\, d\nu$$

s'interprète comme la décomposition de $f(t)$ en une somme d'oscillations (harmoniques) sinusoïdales.

La variable ν a la dimension d'une fréquence.

$\tilde{f}(\nu)$ est l'amplitude complexe correspondant à la fréquence ν.

La courbe $|\tilde{f}(\nu)|$ en fonction de ν est appelée le spectre de f. Elle montre l'importance des différentes fréquences dans la composition de f.

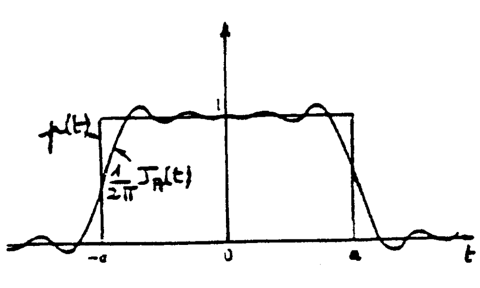
<u>Exemple</u> : comparaison de $f(t)$ et $\frac{1}{2\pi} J_A(t)$, pour $f(t) = p_a(t)$

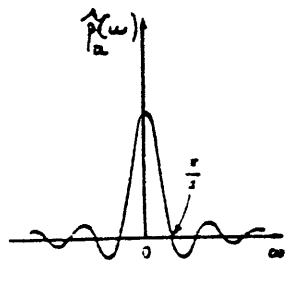
Le calcul de la page précédente conduit à :

$$\frac{1}{2\pi} J_A(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 2\, p_a(t+v)\, \frac{\sin Av}{v}\, dv = \frac{1}{2\pi}\int_{-a-t}^{a-t} 2\, \frac{\sin Av}{v}\, dv = \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{+a} 2\, \frac{\sin A(u-t)}{u-t}\, du$$

(en posant : $v = u - t$)

$$\frac{1}{2\pi}\lim_{A\to+\infty} J_A(t) = \frac{p_a(t+0)+p_a(t-0)}{2} = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < a \\ 0 & \text{si } |t| > a \\ \frac{1}{2} & \text{si } |t| = a \end{cases}$$





Remarque : $\hat{p}_a \notin L^1(\mathbb{R})$

5. Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

Rappel : il n'y a pas de relation d'inclusion entre $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$.

Théorème 4 (de Plancherel - Parseval)

Soit $f \in L^1 \cap L^2$. Alors :

a/ $\tilde{f} \in L^2$

b/ $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 \, d\omega$

ou encore, avec la variable ν

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}(\nu)|^2 \, d\nu} \quad \text{, c'est-à-dire} \quad \|f\|_2 = \|\tilde{f}\|_2 \qquad (10)$$

c/ $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{g(t)} \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\nu) \overline{\tilde{g}(\nu)} \, d\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} \, d\omega \qquad (11)$$

d/ si l'on pose $\tilde{\varphi}_A(\nu) = \int_{-A}^{+A} f(t) e^{-i2\pi\nu t} \, dt$

$\psi_A(t) = \int_{-A}^{+A} \tilde{f}(\nu) e^{i2\pi\nu t} \, d\nu$

$\lim\limits_{A \to +\infty} \| \tilde{\varphi}_A - \tilde{f} \|_2 = 0$ c.à.d. $\lim\limits_{A \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\varphi}_A(\nu) - \tilde{f}(\nu)|^2 \, d\nu = 0$

$\lim\limits_{A \to +\infty} \| \psi_A - f \|_2 = 0$ c.à.d. $\lim\limits_{A \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_A(t) - f(t)|^2 \, dt = 0$

Ces résultats seront admis.
On remarquera toutefois que c/ $\Leftrightarrow$ b/.
En effet, il est évident que c/ $\Rightarrow$ b/ (faire $f = g$)
La démonstration de b/ $\Rightarrow$ c/ repose sur l'identité :

$$4 f \bar{g} = |f+g|^2 - |f-g|^2 + i|f+ig|^2 - i|f-ig|^2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 4 f \bar{g} \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f+g|^2 \, dt - \int_{-\infty}^{+\infty} |f-g|^2 \, dt + i \int_{-\infty}^{+\infty} |f+ig|^2 \, dt - i \int_{-\infty}^{+\infty} |f-ig|^2 \, dt$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}+\tilde{g}|^2 \, d\nu - \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}-\tilde{g}|^2 \, d\nu + i \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}+i\tilde{g}|^2 \, d\nu - i \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}-i\tilde{g}|^2 \, d\nu$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} 4 \tilde{f} \bar{\tilde{g}} \, d\nu$$

Remarques :

- le résultat d/ constitue l'énoncé du théorème d'inversion dans L^2 ; comme pour les séries de Fourier, on voit qu'on gagne en généralité (le théorème est vrai pour toute fonction f de L^2), mais on perd en "précision" sur la convergence (convergence en moyenne quadratique).
- le résultat b/ s'interprète physiquement comme un théorème de conservation de l'énergie. Si $f(t)$ est la d.d.p. aux bornes d'une résistance $R = 1\,\Omega$, $|f(t)|^2$ représente une puissance et $|f(t)|^2 dt$ est l'énergie dissipée pendant le temps dt.

  L'égalité $\int_{\mathbb{R}} |f|^2 \, dt = \int_{\mathbb{R}} |\tilde{f}|^2 \, d\nu$ signifie que la somme de l'énergie dissipée dans le temps est égale à la somme des énergies réparties sur toutes les fréquences.

  $|f(t)|^2$ a la dimension d'une énergie par unité de temps (densité temporelle d'énergie)
  $|\tilde{f}(\nu)|^2$ a la dimension d'une énergie par Hz (densité spectrale d'énergie).

6. Produit de convolution et transformation de Fourier

6.1. Définition et premières propriétés

Le produit de convolution de f par g est la fonction h, si elle existe, notée $h(t) = f(t) * g(t)$ ou $h(t) = (f * g)(t)$ et définie par

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \ .$$

On démontre que si f et g sont dans $L^1(\mathbf{R})$, alors :

a) $(f * g)(t)$ est fini presque partout sur $\mathbf{R}$;

b) $f * g$ est dans $L^1(\mathbf{R})$.

On vérifie facilement que

$$f * g = g * f \quad , \quad f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2 \quad , \quad (f_1 + f_2) * g = f_1 * g + f_2 * g$$

6.2. Transformée de Fourier du produit de deux fonctions et du produit de convolution de deux fonctions

Si $f(t) \xrightarrow{F} \hat{f}(\omega)$, $g(t) \xrightarrow{F} \hat{g}(\omega)$, alors

$$\boxed{\widehat{(f * g)}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)}, \tag{12}$$

$$\boxed{\widehat{(fg)}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\hat{f}(\omega) * \hat{g}(\omega)}. \tag{13}$$

Le résultat (12) s'écrit

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right]e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-i\omega t}dt$$

et pour $\omega = 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right]dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt \ .$$

Démonstration du résultat (12).

$$\widehat{(f * g)}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right]e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,e^{-i\omega t}d\tau\right]dt \ ;$$

on montre que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f(\tau)g(t-\tau)\,e^{-i\omega t}\right|d\tau\right]dt$ est finie et on peut donc appliquer le théorème de Fubini

$$(f*g)(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}g(t-\tau)\,e^{-i\omega t}dt\right]f(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{g}(\omega)e^{-i\omega\tau}f(\tau)d\tau=\hat{g}(\omega)\hat{f}(\omega),$$

ce qui démontre (12). Avec la variable ν, le résultat (12) devient:

$$\boxed{\widetilde{(f*g)}(\nu)=\tilde{f}(\nu)\tilde{g}(\nu)}\;. \qquad (12')$$

Démonstration du résultat (13).
La démonstration est faite dans le cas où f et g sont dans $L^1(\mathbf{R})\cap L^2(\mathbf{R})$, afin d'utiliser le théorème de Plancherel.
Soit à calculer $\widehat{fg}(\omega_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)g(t)e^{-i\omega_0 t}dt$.
On définit $\varphi(t)=\bar{g}(t)e^{i\omega_0 t}$ et on obtient successivement les résultats suivants:

$$g(t)\xrightarrow{F}\hat{g}(\omega)$$

$$\psi(t)=\bar{g}(t)\xrightarrow{F}\hat{\psi}(\omega)=\bar{\hat{g}}(-\omega)$$

$$\psi(t)e^{i\omega_0 t}\xrightarrow{F}\hat{\psi}(\omega-\omega_0)$$

$$\bar{g}(t)e^{i\omega_0 t}=\varphi(t)\xrightarrow{F}\bar{\hat{g}}(\omega_0-\omega)=\hat{\varphi}(\omega).$$

On en déduit:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)g(t)e^{-i\omega_0 t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\bar{\varphi}(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)\bar{\hat{\varphi}}(\omega)d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega_0-\omega)d\omega=\frac{1}{2\pi}\widehat{(f*g)}(\omega_0),$$

ce qui démontre (13). Avec la variable ν, le résultat (13) devient:

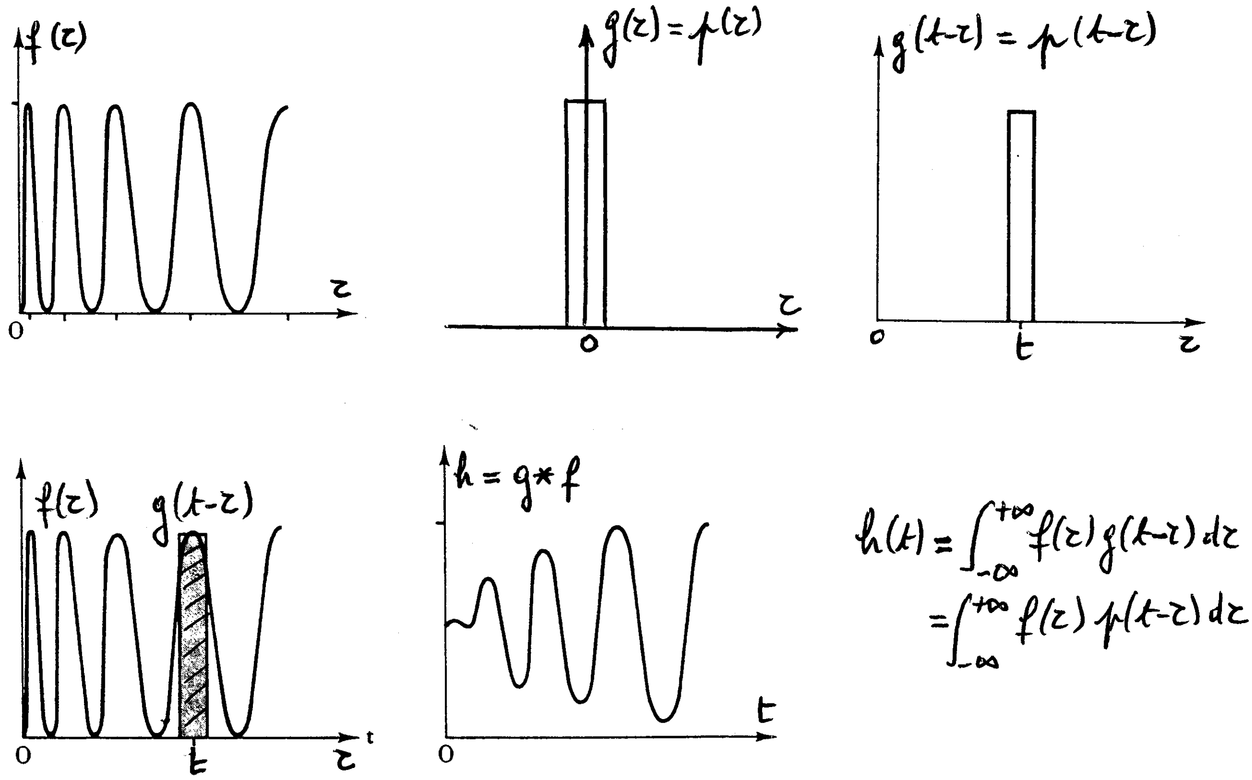
$$\boxed{\widetilde{fg}(\nu)=(\tilde{f}*\tilde{g})(\nu)}\;. \qquad (13')$$

6.3. Exemple: produit de convolution avec la fonction porte

$$r(t) = \left(f * \frac{1}{2a} p_a \right)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2a} f(\tau)\, p_a(t-\tau) d\tau = \frac{1}{2a} \int_{t-a}^{t+a} f(\tau) d\tau \ .$$

Cette quantité représente la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[t-a, t+a]$ (moyenne glissante). En physique, cette opération représente souvent l'effet d'un instrument de mesure. Si la fonction f ne varie pas beaucoup dans l'intervalle $[t-a, t+a]$, alors $r(t) \approx \frac{1}{2a} 2a\ f(t) = f(t)$. Donc plus la porte est étroite (relativement aux variations de f) plus $r(t)$ ressemble à $f(t)$.

<u>exemple</u>



(Attention aux variables portées en abscisse sur les différents graphes).

Sur le dessin, la valeur de $h(t)$ au point t est représentée par l'aire hachurée. On voit que la fonction h ressemble d'autant plus à la fonction f que les variations de f sont lentes par rapport à la durée de la fonction porte.

__Vers la distribution de Dirac__

Pour toutes les fonctions définies ci-dessus, l'aire est la même.

$$\forall a \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2a} p_a(t)dt = 1 .$$

D'autre part, la limite simple de cette suite de fonctions quand $a \to 0$ vaut

$$\lim_{a\to 0} \frac{1}{2a} p_a(t) = \delta(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \neq 0 \\ +\infty & si \quad t = 0 . \end{cases}$$

$$\lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2a} p_a(t)dt = 1 \neq \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{a\to 0} \frac{1}{2a} p_a(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 0 .$$

On aimerait pourtant avoir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

ainsi que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, \delta(t-\tau)d\tau = (f * \delta)(t) = f(t)$$

ce qui voudrait dire que δ est le neutre pour la convolution.

6.4. La convolution en physique . Systèmes .

Un système physique est une application T d'un ensemble de fonctions dans un ensemble de fonctions.

exemple 1: tension d'entrée $\xrightarrow{\text{circuit électrique}}$ tension de sortie

$$V_e(t) \xrightarrow{T_1} V_s(t)$$

exemple 2: brillance d'un objet $\xrightarrow{\text{système optique}}$ brillance de l'image

$$f(x,y,z) \xrightarrow{T_2} g(x,y,z)$$

exemple 3: effet d'un instrument de mesure qui prend la valeur moyenne

$$f(t) \to r(t) = \frac{1}{2a} \int_{t-a}^{t+a} f(\tau)d\tau .$$

D'une manière générale, on écrit $S \xrightarrow{T} R$.

Propriétés intéressantes des "systèmes".

Linéarité

$$\text{si } S_1 \to R_1 \quad S_2 \to R_2 \text{ , alors } \lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 \to \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 .$$

Continuité

$$\begin{array}{ccc} S_n & \xrightarrow{T} & R_n \\ \downarrow_{n\to\infty} & & \downarrow_{n\to\infty} \\ S & \xrightarrow{T} & R \end{array}$$

Invariance par translation

$$\begin{array}{ccc} S(t) & \xrightarrow{T} & R(t) \\ \downarrow & \textit{translation} & \downarrow \\ S(t-\tau) & \xrightarrow{T} & R(t-\tau) \end{array}$$

Un cas intéressant et important est celui où la sortie s'écrit comme produit de convolution, $R = S * T$ (voir l'exemple 3). On dit alors que le système est décrit par un opérateur de convolution.
Dans ce cas, le système (c'est-à-dire l'application T) est linéaire, continu et invariant par translation, ce qui est facile à vérifier.

Le résultat remarquable est que la réciproque est vraie; autrement dit, si un système est linéaire, continu et invariant par translation, alors il existe T tel que $R = S * T$.

Comment peut-on déterminer l'opérateur T?
Dans un cadre plus large, qui est celui des distributions, puisque δ est l'élément neutre pour le produit de convolution, si on choisit $S = \delta$, alors $R = T$. Ce qui se traduit "physiquement" par: la réponse à une impulsion est l'opérateur de convolution qui caractérise le système. Pour cette raison, l'opérateur T est aussi appelé la réponse impulsionnelle du système.

7. Le principe d'incertitude de Heisenberg

Il existe un lien entre l'étalement d'une fonction $f(t)$ autour de sa valeur moyenne et celui de $\hat{f}(\omega)$ autour de sa valeur moyenne.
Ce lien se traduit de la manière suivante :
les fonctions f et $\hat{f}$ ne peuvent pas être l'une <u>et</u> l'autre très fortement localisées autour de leur valeur moyenne ; si l'une est "localisée", l'autre est nécessairement "étalée".

On choisit de mesurer l'étalement de f et $\hat{f}$ à l'aide des écarts-types de t et ω par rapport aux densités $|f(t)|^2 dt$ et $|\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$.

valeurs moyennes : $t_m = \dfrac{\int_{-\infty}^{+\infty} t\,|f(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt}$ $\qquad \omega_m = \dfrac{\int_{-\infty}^{+\infty} \omega\,|\hat{f}(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega}$

écarts-types : $\sigma_t^2 = \dfrac{\int_{-\infty}^{+\infty} (t-t_m)^2 |f(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt}$ $\qquad \sigma_\omega^2 = \dfrac{\int_{-\infty}^{+\infty} (\omega-\omega_m)^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega}$

On remarquera que : $\sigma_t = \dfrac{\|(t-t_m) f\|_2}{\|f\|_2}$ $\qquad \sigma_\omega = \dfrac{\|(\omega-\omega_m)\hat{f}\|_2}{\|\hat{f}\|_2}$

(le symbole $\| \ \|_2$ désigne la norme dans $L^2(\mathbb{R})$).

On démontre le résultat suivant (appelé principe d'incertitude de Heisenberg) :

$$\boxed{\sigma_t\, \sigma_\omega \geqslant \frac{1}{2}} \qquad (14)$$

l'égalité étant atteinte pour les Gaussiennes.

<u>Démonstration</u>

Elle sera faite sous les hypothèses suivantes :
- f de classe $\mathcal{C}^1$,
- les trois fonctions f, f', tf sont dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

A] On démontre d'abord ce résultat pour f réelle, centrée en 0 ainsi que $\hat{f}$ ($t_m = \omega_m = 0$)

$$\|f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2\,dt = \left[t f^2\right]_{-\infty}^{+\infty} - 2\int_{-\infty}^{+\infty} t f f'\,dt = -2\int_{-\infty}^{+\infty} t f f'\,dt$$

(car $t f^2 \to 0$ quand $|t| \to +\infty$)

$$\|f\|_2^2 = 2\left|\int_{-\infty}^{+\infty} t f f'\,dt\right| \leqslant 2\,\|tf\|_2\,\|f'\|_2 \qquad \text{(Schwarz)}$$

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{\|tf\|_2}{\|f\|_2}\,\frac{\|f'\|_2}{\|f\|_2} = \frac{\|tf\|_2}{\|f\|_2}\,\frac{\|\omega \hat{f}\|_2}{\|\hat{f}\|_2} = \sigma_t\,\sigma_\omega$$

(Parseval)

B] L'essentiel de la démonstration est contenu dans les lignes précédentes. La démonstration générale (f à valeurs complexes, avec $\bar{t}$ et $\bar{\omega}$ non nécessairement nuls) n'apporte rien de plus.

$$\|f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f\bar{f}\,dt = \left[(t-t_0)f\bar{f}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty}(t-t_0)(f\bar{f}' + f'\bar{f})\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}(t_0-t)\,(f\bar{f}' + f'\bar{f})\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}(t_0-t)(f\bar{f}' + f'\bar{f} + i\omega_0(f\bar{f} - f\bar{f}))\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}(t_0-t)f(\bar{f}' + i\omega_0\bar{f})\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty}(t_0-t)\bar{f}(f' - i\omega_0 f)\,dt$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}(t_0-t)\,\bar{f}(f'-i\omega_0 f)\,dt \leqslant 2\left|\int_{-\infty}^{+\infty}(t_0-t)\bar{f}(f'-i\omega_0 f)\,dt\right|$$

$$\leqslant 2\,\|(t-t_0)\bar{f}\|_2\,\|f'-i\omega_0 f\|_2 = 2\,\|(t-t_0)f\|_2\,\|f'-i\omega_0 f\|_2 \qquad (15)$$

(Schwarz)

$$= 2\,\|(t-t_0)f\|_2\,\|i\omega\hat{f} - i\omega_0\hat{f}\|_2$$

(Parseval)

$$\|f\|_2^2 \leqslant 2\,\|(t-t_0)f\|_2\,\|(\omega-\omega_0)\hat{f}\|_2$$

Ce résultat est vrai, quels que soient t_0 et ω_0 ; mais il n'est vraiment intéressant que pour $t_0 = t_m$ et $\omega_0 = \omega_m$; en effet, le membre de droite de l'inégalité atteint dans ce cas son minimum.

En conclusion : $$\frac{1}{2} \leqslant \frac{\|(t-t_m)f\|_2}{\|f\|_2}\,\frac{\|(\omega-\omega_m)\hat{f}\|_2}{\|\hat{f}\|_2} = \sigma_t\,\sigma_\omega$$

C] Dans (15) l'égalité est atteinte lorsque

$$f' - i\omega_0 f = \lambda(t-t_0)f \qquad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\frac{f'}{f} = \lambda(t-t_0) + i\omega_0$$

La résolution de cette équation différentielle conduit à :

$$f(t) = \alpha \, e^{\frac{\lambda}{2}(t-t_0)^2 + i\omega_0 t}$$

on ne conserve que les solutions sommables $(\lambda < 0)$

Elles s'écrivent :

$$f(t) = \alpha \, e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2\beta^2}} \, e^{i\omega_0 t}$$

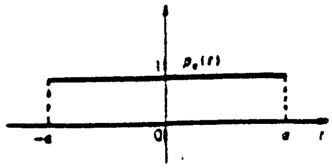
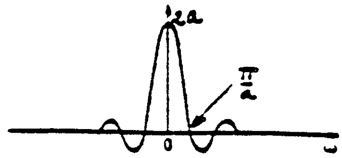
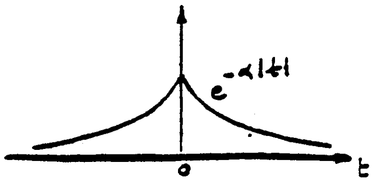
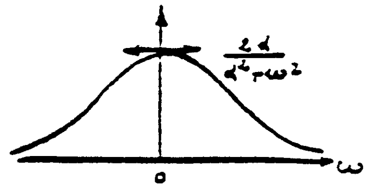
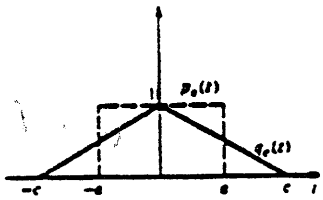
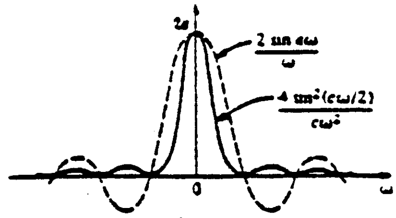
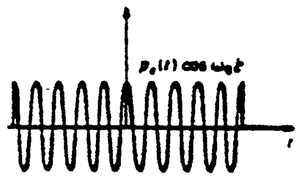
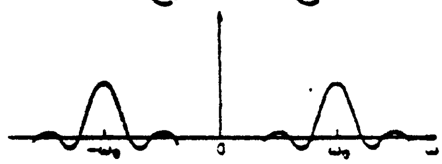
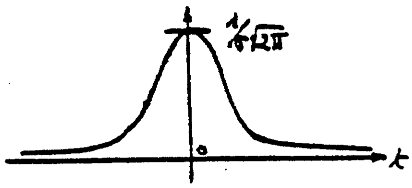
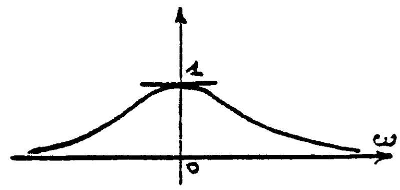
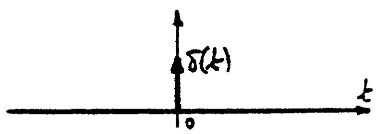
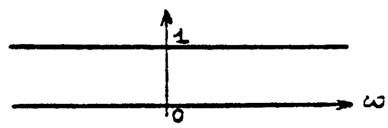
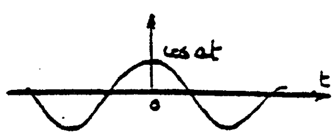
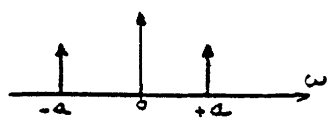
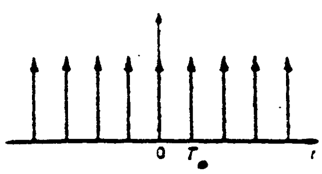
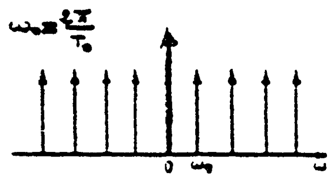
Ce sont des Gaussiennes.

On vérifiera, à titre d'exercice, que $f(t)$ est centrée en t_0, que $\hat{f}(\omega)$ est centrée en ω_0 et que $\sigma_t \, \sigma_\omega = \frac{1}{2}$ (après avoir calculé les écarts-types).

PROPRIETES DE LA TRANSFORMATION DE FOURIER

$f(t)$	$\hat{f}(\omega)$
$\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)$	$\lambda_1 \hat{f}_1(\omega) + \lambda_2 \hat{f}_2(\omega)$
$f(-t)$	$\hat{f}(-\omega)$
$\overline{f(t)}$	$\overline{\hat{f}(-\omega)}$
$f(a\,t)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}\ \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$
$f(t-a)$	$\hat{f}(\omega)\ e^{-i\omega a}$
$f(t)\ e^{i\omega_0 t}$	$\hat{f}(\omega-\omega_0)$
$(f*g)(t)$	$\hat{f}(\omega)\,\hat{g}(\omega)$
$f(t)\ g(t)$	$\frac{1}{2\pi}\left(\hat{f}*\hat{g}\right)(\omega)$
$f^{(n)}(t)$	$(i\omega)^n\ \hat{f}(\omega)$
$(-it)^n\ f(t)$	$[\hat{f}(\omega)]^{(n)}$

Transformées de Fourier usuelles

$f(t)$	$\hat{f}(\omega)$		
$p_a(t)$	$\dfrac{2\sin a\omega}{\omega}$		
$e^{-\alpha\|t\|}$ $(\alpha>0)$	$\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$		
$q_c(t)$	$\dfrac{4\sin^2\frac{c\omega}{2}}{c\,\omega^2}$		
$p_a\cos\omega_0 t$	$\dfrac{\sin a(\omega-\omega_0)}{\omega-\omega_0}+\dfrac{\sin a(\omega+\omega_0)}{\omega+\omega_0}$		
$\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$	$e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$		
$\delta(t)$	1		
1	$2\pi\,\delta(\omega)$		
$\delta(t-a)$	$e^{-ia\omega}$		
e^{iat}	$2\pi\,\delta(\omega-a)$		
$\cos at$	$\pi\delta(\omega-a)+\pi\delta(\omega+a)$		
$\delta^{(n)}(t)$	$(i\omega)^n$		
$(-it)^n$	$2\pi\,\delta^{(n)}(\omega)$		
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_0)$	$\omega_0\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-n\omega_0)$ $\left(\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}\right)$		

V. Les Distributions

1. Motivations physiques

Considérons un ensemble de charges comprenant :
- des charges ponctuelles isolées
- des charges réparties de manière continue sur un morceau de courbe $\widehat{AB}$, une surface S, dans un volume V, avec respectivement les densités $\lambda(P)$, $\sigma(P)$, $\rho(P)$.

La charge totale s'écrit :

$$q = \sum_i q_i + \int_{\widehat{AB}} \lambda(P)\, dl + \iint_S \sigma(P)\, dS + \iiint_V \rho(P)\, dv$$

Le potentiel créé par cet ensemble de charges, au point M_0, est donné par l'expression :

$$V(M_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\sum_i \frac{q_i}{M_0P_i} + \int_{\widehat{AB}} \frac{\lambda(P)}{M_0P}\, dl + \iint_S \frac{\sigma(P)}{M_0P}\, dS + \iiint_V \frac{\rho(P)}{M_0P}\, dv \right.$$

On peut chercher à alléger l'écriture en exprimant les fonctions précédentes sous forme d'une seule intégrale (pour un problème à 3 dimensions, ce sera un intégrale de volume).

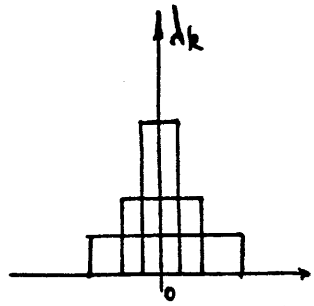
Pour commencer, on considère un problème à une seule dimension, dans lequel peuvent se superposer une densité linéaire de charges et des charges ponctuelles isolées. La question est alors : comment décrire une charge ponctuelle à l'aide d'une densité linéaire ?

Soit une charge $q = 1\,c$ placée à l'origine d'un axe $\overrightarrow{x'x}$. La densité linéaire $\lambda(x)$ représentant cette charge doit vérifier les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \lambda(x) = 0 & \forall x \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(x)\, dx = 1 \end{cases}$$

Si $\lambda(x)$ est une fonction, les 2 conditions précédentes ne peuvent pas être réalisées en même temps, puisque l'intégrale d'une fonction presque partout nulle est nulle.

Partant de cette constatation, on peut envisager divers types de solution :



a/ se dire qu'une charge n'est jamais vraiment "ponctuelle" et définir les grandeurs précédentes par passage à la limite.
on considère la suite de fonctions :

$$\lambda_k(x) = \begin{cases} k/2 & \text{si } |x| < 1/k \\ 0 & \text{si } |x| > 1/k \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}$$

Cette suite de fonctions vérifie les propriétés :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda_k(x)\, dx = 1 \quad \forall k \qquad \text{et} \qquad \lim_{k \to +\infty} \lambda_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ +\infty & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Difficulté non résolue : la fonction limite λ ne vérifie pas $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(x)\, dx = 1$

b/ remarquer que l'expérimentateur n'a pas accès directement à la densité linéaire de charges ; il étudie indirectement ses propriétés par la mesure d'un certain nombre de grandeurs scalaires dans laquelle elle intervient.
exemples : charge totale $q = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(x)\, dx$

potentiel en x_0 $\quad V(x_0) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda(x)}{|x_0 - x|}\, dx$

D'où l'idée de définir λ par son effet sur différentes fonctions. D'un point de vue mathématique, on introduit une <u>application</u> T_λ, définie sur un ensemble

de fonctions $\mathcal{D}$ (voir § 2), à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Dans l'exemple précédent, T_λ est l'application qui fait correspondre à toute fonction φ, la valeur de cette fonction à l'origine.

On le vérifie sur 2 fonctions φ_1 et φ_2.

$\varphi_1(x) = 1$ $\qquad q = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x)\lambda(x)\,dx$

or $q = 1 = \varphi_1(0)$ donc $\varphi_1 \xmapsto{T_\lambda} \varphi_1(0)$

$\varphi_2(x) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0|x_0 - x|}$ $\qquad V(x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\lambda(x)}{4\pi\varepsilon_0|x_0-x|}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(x)\lambda(x)\,dx$

Le potentiel créé en x_0 par une charge unité, placée en 0, vaut
$V(x_0) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0|x_0|}$ donc $\varphi_2 \xmapsto{T_\lambda} \varphi_2(0)$

2. Définitions - Exemples

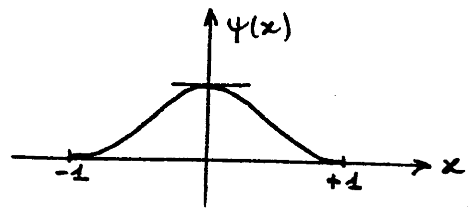
2.1 Espace vectoriel $\mathcal{D}$

Il s'agit de choisir l'ensemble des "fonctions tests" $\mathcal{D}$ sur lequel les distributions vont être définies.
$\mathcal{D}$ est l'espace vectoriel des fonctions $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, indéfiniment dérivables, à support borné.

Le support d'une fonction φ est le plus petit ensemble fermé en dehors duquel la fonction est nulle (i.e. c'est l'adhérence de l'ensemble des points x tels que $\varphi(x) \neq 0$)

Exemple :

$$\psi(x) = \begin{cases} \exp \dfrac{1}{x^2 - 1} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$



Le support de ψ est l'intervalle $[-1, +1]$.
Exercice : démontrer que ψ est indéfiniment dérivable en $x = \pm 1$ et que toutes ses dérivées sont nulles en ces points.

On rencontre souvent dans les démonstrations la famille de fonctions de $\mathcal{D}$ suivante :

$$\gamma_k(x) = \frac{\psi(kx)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(kx)\,dx} = \frac{\psi(kx)}{\int_{-1/k}^{1/k} \psi(kx)\,dx} \qquad k \in \mathbb{N}$$

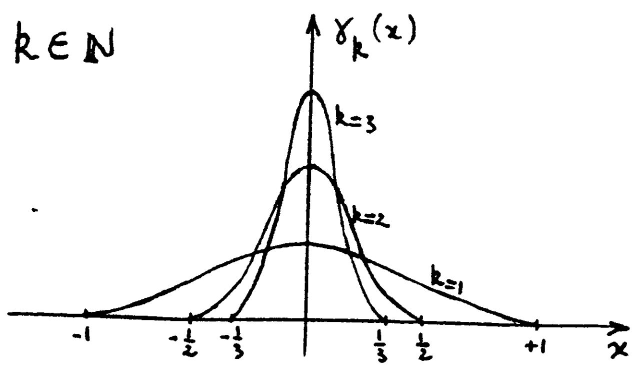
Le support de γ_k est : $[-1/k, 1/k]$

En faisant le changement de variable $X = kx$ dans l'intégrale, on voit que :

$$\gamma_k(x) = \frac{k\,\psi(kx)}{A}$$

A étant l'aire "sous" la courbe $\psi(x)$.
D'autre part, la définition de γ_k implique que $\int_{-1/k}^{1/k} \gamma_k(x)\,dx = 1$

D'où l'allure des courbes γ_k.



Théorème d'approximation : toute fonction continue f à support borné peut être approchée uniformément, à ε près (ε quelconque), par une fonction $\varphi \in \mathcal{D}$.
Cela signifie que :
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \varphi \in \mathcal{D}$ telle que $\forall x \quad |f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$

Idée de la démonstration :
$g_k(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, \gamma_k(x-u)\, du \quad \in \mathcal{D}$, si f est continue à support borné,

et la suite g_k converge uniformément vers f, lorsque $k \to +\infty$.
(voir aussi le § sur le produit de convolution dans le chapitre précédent).

Notion de convergence dans $\mathcal{D}$: on dit qu'une suite φ_k de $\mathcal{D}$ converge vers une fonction φ de $\mathcal{D}$, lorsque $k \to +\infty$ si
- les supports des φ_k sont contenus dans un même ensemble borné, indépendant de k
- les dérivées de chaque ordre des φ_k convergent uniformément vers les dérivées correspondantes de φ

2.2. Définition d'une distribution

On appelle distribution toute application linéaire continue de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{C}$.
On note : $\varphi \xrightarrow{T} \langle T, \varphi \rangle$
Une distribution a donc les propriétés suivantes :
$\forall \varphi_1$ et $\varphi_2 \in \mathcal{D}$, $\forall \lambda$ et $\mu \in \mathbb{C}$, $\quad \langle T, \lambda \varphi_1 + \mu \varphi_2 \rangle = \lambda \langle T, \varphi_1 \rangle + \mu \langle T, \varphi_2 \rangle$

si φ_k converge vers φ au sens défini ci-dessus, la suite de nombres complexes $\langle T, \varphi_k \rangle$ converge vers $\langle T, \varphi \rangle$.

2.3. Les exemples importants de distributions

On donne dans ce paragraphe les exemples de distributions utiles en physique.

2.3.1 distributions régulières

soit f une fonction localement sommable. On définit la distribution régulière T_f par :

$$\boxed{\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \varphi(x)\, dx} \quad (1)$$

cette intégrale a un sens puisque φ est à support borné et f localement sommable (c.a.d. sommable sur tout ensemble borné).
On vérifie que T_f est linéaire et continue.

Proposition : $T_f = T_g \Leftrightarrow f = g$ presque partout (f et g localement sommables)
(le résultat est évident dans un sens. On admettra la réciproque)
Conséquence : on identifie T_f à la classe de fonctions localement sommables définie par f, on note : $\langle T_f, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$

Extension du domaine de définition de T_f : $\mathcal{D}$ est l'ensemble commun de définition de toutes les distributions. Mais certaines distributions peuvent être étendues à des ensembles plus grand que $\mathcal{D}$.
Dans le cas de f localement sommable, T_f est définie pour toutes les fonctions tests φ telles que $(f\varphi)$ soit sommable.

Les fonctions φ utilisées en physique ne sont pas, en général, dans $\mathcal{D}$.
Par exemple, si f est une densité linéaire de charges, la charge totale est représentée par : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \langle f, \varphi_1 \rangle = \langle f, 1 \rangle$ $\quad (1 \notin \mathcal{D})$

Le potentiel en un point x_0 vaut :

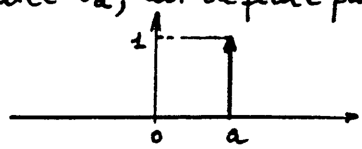
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{f(x)}{|x_0 - x|}\,dx = \langle f, \varphi_2 \rangle \quad \text{(voir notations du § 1)} \quad (\varphi_2 \notin \mathcal{D})$$

2.3.2. distribution de Dirac

- la distribution de Dirac en zéro, notée δ, est définie par : $\boxed{\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)}$ (2)

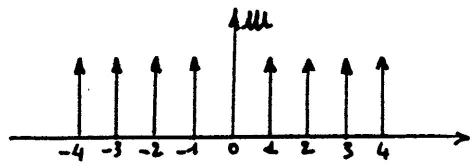
Elle peut être étendue à toutes les fonctions φ continues en 0.
On note souvent, par abus, la distribution de Dirac comme une fonction $\delta(x)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et on écrit par analogie avec les distributions régulières :
$\int_{\mathbb{R}} \delta(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0)$ (notation incorrecte)
Si δ représente une densité de charges :
la charge totale vaut $\langle \delta, \varphi_1 \rangle = \varphi_1(0) = 1$
le potentiel en x_0 vaut $\langle \delta, \varphi_2 \rangle = \varphi_2(0) = 1/4\pi\varepsilon_0 |x_0|$
la distribution δ s'interprète physiquement comme la charge unité placée en 0.

- La distribution de Dirac au point a, notée δ_a, est définie par:
$\boxed{\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)}$ (2')



Représentation graphique:
on représente δ_a par une flèche de hauteur 1, à l'abscisse a, il faut prendre garde à ne pas confondre δ_a avec la fonction $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x = a \\ 0 & \text{pour } x \neq a \end{cases}$
on rencontre souvent la notation (incorrecte) : $\int_{\mathbb{R}} \delta_a(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(a)$

- Peigne de Dirac : $\boxed{Ш = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_n}$



Cette distribution joue un rôle important. Elle est symbolisée par la lettre russe Ш (cha).
Le peigne de Dirac se présente sous forme d'une série de distributions.
Il faut donc donner un sens à cette somme infinie (voir § 6) :
la série $\sum_n \delta_n$ est convergente $\Leftrightarrow$ $\sum_n \langle \delta_n, \varphi \rangle$ converge $\forall \varphi \in \mathcal{D}$

or : $\sum_n \langle \delta_n, \varphi \rangle = \sum_n \varphi(n)$; mais φ étant à support borné, la série $\sum_n \varphi(n)$ est en réalité une somme finie

2.4 Support d'une distribution

Cette notion n'est pas très simple. Elle nécessite une définition :
- on dit que T est nulle dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}$ si pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}$, ayant son support contenu dans Ω, $\langle T, \varphi \rangle = 0$.
- le support de T est le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel T est nulle

Pour les applications, il suffit de savoir que
- si f est une fonction continue, le support de T_f coïncide avec le support de f
- le support de δ_a se réduit au point a
c.à.d. $\langle \delta_a, \varphi \rangle = 0$ pour toute fonction φ dont le support ne contient pas a.

3. Opérations élémentaires sur les distributions

Les distributions peuvent être considérées comme une généralisation des classes de fonctions localement sommables. Pour que la généralisation soit complète, il faut définir des opérations sur les distributions généralisant les opérations sur les fonctions localement sommables.
→ il sera nécessaire, dans chaque cas, de vérifier qu'on a bien défini une distribution, c.à.d. une application linéaire continue de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{C}$.

3.1. Addition - Multiplication par un scalaire

Pour des fonctions localement sommables : $\int (f+g)\,\varphi\,dx = \int f\varphi\,dx + \int g\varphi\,dx$

on définit donc la somme de 2 distributions par : $\boxed{\langle T_1 + T_2, \varphi\rangle = \langle T_1, \varphi\rangle + \langle T_2, \varphi\rangle}$ (3)

Un raisonnement analogue conduit à la définition de λT, pour $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\boxed{\langle \lambda T, \varphi\rangle = \lambda \langle T, \varphi\rangle} \quad (4)$$

Ces 2 opérations font de l'ensemble des distributions sur $\mathcal{D}$, un espace vectoriel noté $\mathcal{D}'$.

3.2. Translation d'une distribution

Soit $\underline{a} \in \mathbb{R}$; $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-a)\,\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,\varphi(y+a)\,dy$ (pour f localement sommable)

on définit la distribution translatée de T, et on la note $T(x-a)$, par :

$\boxed{\langle T(x-a), \varphi(x)\rangle = \langle T(x), \varphi(x+a)\rangle}$ (5) (N.B. cette écriture faisant figurer les variables est incorrecte, mais commode)

exemple : quelle est la translatée de la distribution de Dirac ?
$\langle \delta(x-a), \varphi(x)\rangle = \langle \delta(x), \varphi(x+a)\rangle = \varphi(0+a) = \varphi(a)$
Donc : $\delta(x-a) = \delta_a$

La notion de translation d'une distribution permet de définir des distributions périodiques.
On dira que T est de période $\underline{a}$ si $T(x-a) = T(x)$
c.à.d. si :
$\langle T(x-a), \varphi(x)\rangle = \langle T(x), \varphi(x+a)\rangle = \langle T(x), \varphi(x)\rangle$
Donc :
$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad \langle T(x), \varphi(x+a) - \varphi(x)\rangle = 0$

3.3. Changement d'échelle

On peut changer l'unité avec laquelle est mesurée la variable x, en multipliant x par une constante réelle $a \neq 0$.
Pour une fonction localement sommable :
$\int_{-\infty}^{+\infty} f(ax)\,\varphi(x)\,dx = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi\left(\frac{x}{a}\right)dx$
on définit donc $T(ax)$ par :

$$\boxed{\langle T(ax), \varphi(x)\rangle = \frac{1}{|a|}\left\langle T(x), \varphi\left(\frac{x}{a}\right)\right\rangle} \quad (6)$$

application : $\left.\begin{array}{l} <\delta(ax), \varphi(x)> = \frac{1}{|a|} <\delta(x), \varphi(\frac{x}{a})> = \frac{1}{|a|}\varphi(0) \\ <\frac{1}{|a|}\delta, \varphi> = \frac{1}{|a|}\varphi(0) \end{array}\right\} \forall \varphi \in \mathcal{D}$

on en déduit que : $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$

Cas particulier : $a = -1$; on définit la distribution notée $T(-x)$:
$<T(-x), \varphi(x)> = <T(x), \varphi(-x)>$
Cette égalité permet de définir, comme pour les fonctions, des distributions paires ou impaires.
T est paire ssi : $T(x) = T(-x)$
$<T(-x), \varphi(x)> = <T(x), \varphi(-x)> = <T(x), \varphi(x)>$
$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad <T(x), \varphi(x) - \varphi(-x)> = 0$

T est impaire ssi : $T(x) = -T(-x)$
$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad <T(x), \varphi(x) + \varphi(-x)> = 0$

Exemple : $\delta(-x) = \delta(x)$ la distribution de Dirac (en zéro) est paire.

4. Dérivation des distributions

La propriété essentielle des distributions est qu'elles sont indéfiniment dérivables dans $\mathcal{D}'$.

4.1. Définitions

On regarde de nouveau ce qui se passe pour f localement sommable, dérivable et à dérivée f' continue.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx = [f(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx$$

$<f', \varphi> = -<f, \varphi'>$
on est ainsi conduit à la définition : $\boxed{<T', \varphi> = -<T, \varphi'>}$

On vérifie que cette égalité définit bien une distribution, c.à.d. une application linéaire continue T' de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{C}$.
Plus généralement, on définit la dérivée d'ordre n par :

$$\boxed{<T^{(n)}, \varphi> = (-1)^n <T, \varphi^{(n)}>} \quad (7)$$

Le membre de droite existe puisque φ est indéfiniment dérivable.

<u>Proposition</u> : toute distribution T a des dérivées à tous les ordres ; ce sont des distributions définies par l'égalité (7).

<u>Remarque</u> :
En particulier, toute fonction localement sommable a des dérivées à tous les ordres. mais ce ne sont pas en général des fonctions. Les distributions sont un peu pour les fonctions ce que les nombres complexes sont pour les réels. toute équation algébrique à coefficients réels ou complexes a des racines complexes. toute fonction localement sommable ou toute distribution a des dérivées à tous les ordres qui sont des distributions.

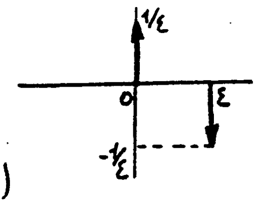
4.2 Exemples importants

4.2.1 Dérivées successives de δ

$$\langle \delta', \varphi \rangle = - \langle \delta, \varphi' \rangle = - \varphi'(0)$$

$$\langle \delta^{(m)}, \varphi \rangle = (-1)^m \langle \delta, \varphi^{(m)} \rangle = (-1)^m \varphi^{(m)}(0)$$

Interprétation physique de δ'



Considérons la distribution :
$T_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\delta - \frac{1}{\varepsilon}\delta_\varepsilon$ (ε réel >0)

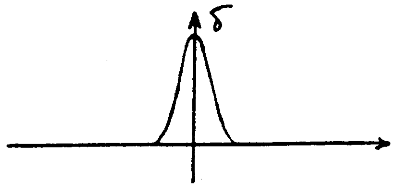
$$\langle T_\varepsilon, \varphi \rangle = \frac{1}{\varepsilon}\varphi(0) - \frac{1}{\varepsilon}\varphi(\varepsilon) = - \frac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)}{\varepsilon}$$

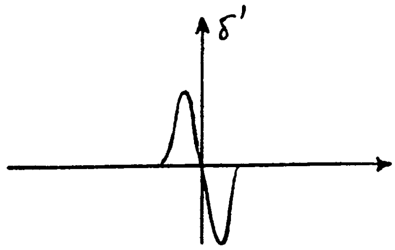
quand $\varepsilon \to 0$, $\langle T_\varepsilon, \varphi \rangle \to -\varphi'(0)$
or, on a vu que la distribution δ représente une charge unité placée en 0.
T_ε représente une charge $\frac{1}{\varepsilon}$ placée en 0 et une charge $-\frac{1}{\varepsilon}$ placée à l'abscisse ε.

Il s'agit donc d'un dipôle de moment dipolaire $P = \varepsilon \times \frac{1}{\varepsilon} = 1$

La distribution δ' définit donc un dipôle de moment 1, placé à l'origine.

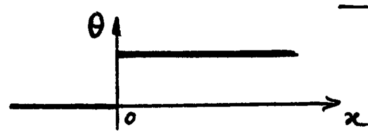
Si on essaye de représenter δ et δ' par des fonctions, une image approchée est la suivante :





4.2.2 Dérivée de l'échelon unité (ou fonction de Heaviside) au sens des distributions

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



$\theta(x)$ n'étant pas continue en zéro, elle n'est pas dérivable au sens des fonctions en ce point.
C'est une fonction localement sommable. On peut donc définir la distribution régulière T_θ attachée à θ :

$$\langle T_\theta, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, \theta(x)\, dx = \int_0^{+\infty} \varphi(x)\, dx$$

sa dérivée $(T_\theta)'$ vérifie : $\langle (T_\theta)', \varphi \rangle = - \langle T_\theta, \varphi' \rangle = - \int_0^{+\infty} \varphi'(x)\, dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$

Cette égalité étant vraie, quelle que soit $\varphi \in \mathcal{D}$, on en déduit $(T_\theta)' = \delta$.

On note souvent pour simplifier, θ à la place de T_θ et θ' à la place de $(T_\theta)'$.

Donc : $\underline{\theta' = \delta}$ (égalité entre deux distributions)

Ce résultat correspond bien à l'idée intuitive qu'on a de la pente de la courbe représentative de $\theta(x)$:
pente nulle pour $x<0$, infinie pour $x=0$, nulle pour $x>0$.

4.2.3 Dérivée au sens des distributions d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}-\{a\}$

Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,a[\,\cup\,]a,+\infty[$. On suppose en outre que f et f' admettent, en a, une limite finie à droite et une limite finie à gauche. Ces deux fonctions sont donc localement sommables. On note :

T_f la distribution régulière attachée à f et $(T_f)'$ sa dérivée

$T_{f'}$ la distribution régulière attachée à la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}-\{a\}$

$\sigma_a^0 = f(a^+) - f(a^-)$ le saut de la fonction f en a.

Exemple : pour l'échelon unité $(T_\Theta)' = \delta \qquad T_{\Theta'} = 0 \qquad \sigma_0^0 = 1$

On cherche à établir une relation entre $(T_f)'$ et $T_{f'}$.

$$<(T_f)', \varphi> = -<T_f, \varphi'> = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{a} f\varphi'\,dx - \int_a^{+\infty} f\varphi'\,dx$$

Les hypothèses faites sur les fonctions f et f' permettent d'intégrer par parties.

$$-\int_a^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx = -[f(x)\varphi(x)]_a^{+\infty} + \int_a^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx = f(a^+)\varphi(a) + \int_a^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx$$

De même : $-\int_{-\infty}^{a} f(x)\varphi'(x)\,dx = -f(a^-)\varphi(a) + \int_{-\infty}^{a} f'(x)\varphi(x)\,dx$

$$<(T_f)', \varphi> = \sigma_a^0\varphi(a) + \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx = \sigma_a^0 <\delta_a, \varphi> + <T_{f'}, \varphi>$$

On en déduit que : $\boxed{(T_f)' = \sigma_a^0\,\delta_a + T_{f'}}$ (8)

Remarques : la discontinuité de f apparaît sous la forme de la distribution δ.

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ entier, alors $(T_f)' = T_{f'}$.

Dans ce cas particulier, la dérivée de la distribution régulière attachée à f est la distribution régulière attachée à la dérivée de f.

Pour simplifier l'écriture, on note souvent :

f et f' à la place de T_f et $(T_f)'$
$\{f'\}$ à la place de $T_{f'}$

L'égalité précédente s'écrit alors : $\boxed{f' = \sigma_a^0\,\delta_a + \{f'\}}$

Exemples

$$[\Theta(x)\cos x]' = \{-\Theta(x)\sin x\} + \delta$$

$$[\Theta(x)\sin x]' = \{\Theta(x)\cos x\}$$

(égalités entre distributions)

Aucune de ces deux fonctions n'est dérivable au sens usuel, en $x=0$

4.2.4 Dérivées successives, au sens des distributions, d'une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}-\{a\}$

On suppose que chacune des dérivées de f admet, en a, une limite finie à droite et une limite finie à gauche.

On note :

$f', f'', \dots, f^{(n)}$ à la place de $(T_f)', (T_f)'' \dots (T_f)^{(n)}$ les dérivées successives de la distribution T_f

$\{f'\}, \{f''\}, \dots, \{f^{(n)}\}$ à la place de $T_{f'}, T_{f''} \dots T_{f^{(n)}}$ les distributions régulières attachées aux dérivées de f sur $\mathbb{R}-\{a\}$

$\sigma_a^k = f^{(k)}(a+) - f^{(k)}(a-)$ le saut de la dérivée $k^{\text{ième}}$ $(k = 1, 2, \dots, n)$

En utilisant le résultat du paragraphe précédent, on montre facilement que :

$$\boxed{\begin{aligned} f'' &= \sigma_a^1 \delta_a + \sigma_a^0 \delta'_a + \{f''\} \\ &\vdots \\ f^{(n)} &= \sigma_a^{n-1}\delta_a + \sigma_a^{n-2}\delta'_a + \dots + \sigma_a^0 \delta_a^{(n-1)} + \{f^{(n)}\} \end{aligned}}$$

<u>Remarque</u> : pour une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R} - \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$

$$f^{(k)} = \sum_{i=0}^{p} \left(\sigma_{a_i}^{k-1}\delta_{a_i} + \sigma_{a_i}^{k-2}\delta'_{a_i} + \dots + \sigma_{a_i}^0 \delta_{a_i}^{(k-1)} \right) + \{f^{(k)}\} \qquad (k = 1, 2, \dots, n)$$

5. Multiplication des distributions

La multiplication de 2 distributions arbitraires n'est pas possible.
Par exemple, si f est localement sommable, elle définit une distribution, mais f^2 n'a aucune raison d'être aussi localement sommable (ex. $\frac{1}{\sqrt{|x|}}$ et $\frac{1}{|x|}$).

Nous définirons uniquement le produit d'une distribution quelconque par une <u>fonction indéfiniment dérivable</u> au sens usuel.

Cas d'une distribution régulière :
soit f localement sommable et ψ indéfiniment dérivable ;

$$\langle \psi f, \varphi \rangle = \int \psi f \varphi \, dx = \langle f, \psi\varphi \rangle$$

on définit par analogie, pour une distribution T quelconque, son produit par ψ :

$$\boxed{\langle \psi T, \varphi \rangle = \langle T, \psi\varphi \rangle} \quad (9) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

$\psi\varphi$ est encore une fonction de $\mathcal{D}$; on vérifie que ψT est linéaire, continue.

Application :

$\langle \psi\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, \psi\varphi \rangle = \psi(0)\,\varphi(0)$ $\qquad \boxed{\psi\delta = \psi(0)\,\delta}$ (10)

En particulier : $x\delta = 0$ et pour tout n, $x^n \delta = 0$

On démontre que : $\boxed{xT = 0 \Leftrightarrow T = C\delta}$ $\quad (C \in \mathbb{C})$

<u>Exercice</u> : montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad x\,\delta^{(n)} = -n\,\delta^{(n-1)}$
en particulier $\quad x\,\delta' = -\delta$

Le produit ψT se dérive suivant la formule : $\boxed{(\psi T)' = \psi' T + \psi T'}$

(égalité entre distributions)

Démonstration:

$\langle(\psi T)', \varphi\rangle = -\langle\psi T, \varphi'\rangle = -\langle T, \psi\varphi'\rangle$

$\langle\psi' T, \varphi\rangle = \langle T, \psi'\varphi\rangle$

$\langle\psi T', \varphi\rangle = \langle T', \psi\varphi\rangle = -\langle T, (\psi\varphi)'\rangle$

Il faut donc montrer que : $-\langle T, \psi\varphi'\rangle = \langle T, \psi'\varphi\rangle - \langle T, (\psi\varphi)'\rangle$

soit :

$\langle T, (\psi\varphi)' - (\psi\varphi' + \psi'\varphi)\rangle = 0$ ce qui est vrai $\forall \varphi \in \mathcal{D}$

6. Convergence dans $\mathcal{D}'$

Définition : on dit qu'une suite de distributions T_n converge dans $\mathcal{D}'$, si pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$, la suite numérique $\langle T_n, \varphi\rangle$ converge.

on peut appeler $\langle T, \varphi\rangle$ la limite des $\langle T_n, \varphi\rangle$, quand $n \to +\infty$.
T est évidemment linéaire, on montre (difficile) qu'elle est continue.

Proposition : si une suite T_n de distributions converge au sens précédent, sa limite T est une distribution.
même résultat pour une série de distributions :
Si $(\sum_n T_n)$ est une série de distributions telle que la série numérique $\sum_n \langle T_n, \varphi\rangle$ converge pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$, alors elle converge vers une distribution.

Attention : il n'y a pas de relation d'implication entre la convergence presque partout des fonctions localement sommables et la convergence dans $\mathcal{D}'$.

Exemple : la suite de fonctions $f_n(x) = \sin nx$ n'a pas de limite au sens de la convergence simple presque partout.
Par contre :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin nx \, \varphi(x)\, dx = \left[-\frac{\cos nx}{n}\varphi(x)\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n} \varphi'(x)\, dx$$

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \sin nx \, \varphi(x)\, dx\right| = \frac{1}{n}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \cos nx\, \varphi'(x)\, dx\right| \leq \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi'(x)|\, dx$$

tend vers zéro quand $n \to +\infty$

La suite de fonctions localement sommables $\sin nx$ converge donc au sens des distributions

Dérivation : si les distributions T_n convergent pour $n \to +\infty$ vers la distribution T, alors à tous les ordres k, les dérivées $T_n^{(k)}$ convergent vers $T^{(k)}$ (pour $n \to +\infty$)
Autrement dit, la dérivation est une opération linéaire continue dans $\mathcal{D}'$.
(ce résultat se vérifie sans difficulté)

Même résultat pour les séries : toute série convergente de distributions est dérivable terme à terme sous le signe Σ.

Remarque : <u>on notera la simplicité de ces résultats par rapport aux résultats connus pour les fonctions</u> (si $f_n \to f$ uniformément et si les f_n sont dérivables, f ne l'est pas nécessairement ; de plus si f est dérivable, les f'_n ne convergent pas toujours vers f')

Convergence vers δ

Un cas particulier de convergence dans $\mathcal{D}'$ est la convergence de distributions régulières vers δ.

Il existe un théorème qui énonce des conditions suffisantes pour qu'une suite de fonctions localement sommables converge dans $\mathcal{D}'$ vers δ.
On admettra sans démonstration que les 3 suites ci-dessous convergent vers δ :

a/ $d_k \to \delta$ quand $k \to +\infty$ (cf. § 1 a/)

b/ $k \exp(-\pi k^2 x^2) \to \delta$ quand $k \to +\infty$

c/ $\gamma_k \to \delta$ quand $k \to +\infty$ (cf. § 2.1)

Ce sont de telles suites de fonctions qui ont conduit historiquement à la notion de distribution de Dirac δ.

7. Sous-espaces de $\mathcal{D}'$

On peut être amené à travailler sur un espace de fonctions tests moins restreint que $\mathcal{D}$. On obtient dans ce cas un ensemble de distributions contenu dans $\mathcal{D}'$, puisque les conditions sur les fonctions sont moins fortes.
Sous-espaces utilisés :

* $\mathcal{S}$: espace des fonctions indéfiniment dérivables décroissant à l'infini, ainsi que toutes leurs dérivées, plus vite que toute puissance de $1/|x|$
* $\mathcal{E}$: espace des fonctions indéfiniment dérivables

* $\mathcal{S}'$: est appelé l'espace des distributions tempérées
* $\mathcal{E}'$: on montre qu'il s'agit de l'espace des distributions à support borné.

On a les inclusions suivantes : $\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{E}$

$\mathcal{D}' \supset \mathcal{S}' \supset \mathcal{E}'$

8. Distributions à plusieurs dimensions

Fonctions tests $\mathcal{D}$ est l'espace vectoriel des fonctions $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, à support borné, telles que leurs dérivées partielles existent à tous les ordres et sont continues.

Exemple : $\varphi(x) = \begin{cases} \exp \dfrac{1}{|x|^2 - 1} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$ avec $\begin{cases} x = (x_1, x_2, \dots x_n) \\ |x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 \end{cases}$

Le théorème d'approximation reste vrai ; la notion de convergence dans $\mathcal{D}$ est la même.

Exemples

- les distributions régulières pour f localement sommable
  par ex., en dimension 2 : $\langle f, \varphi \rangle = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, \varphi(x,y)\, dx\, dy$

- distribution ponctuelle de Dirac à l'origine : $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0, 0, \dots, 0)$

- distribution superficielle de Dirac sur une surface S de $\mathbb{R}^3$:
  $\langle \delta_S, \varphi \rangle = \iint_S \varphi\, ds$

- distribution linéaire de Dirac sur une courbe l de $\mathbb{R}^3$:
  $\langle \delta_l, \varphi \rangle = \int_l \varphi\, dl$

Une densité superficielle σ de charges sur une surface S sera représentée par la distribution $(\sigma\, \delta_S)$.

Les différentes opérations se généralisent sans difficulté à $\mathbb{R}^n$.

Dérivation

soit $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$, $k_i \in \mathbb{N}$

on note $|k| = k_1 + \dots + k_n$

et D^k l'opérateur différentiel $D^k = \dfrac{\partial^{k_1+\dots+k_n}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}$

on définit la distribution $(D^k T)$ par :

$$\boxed{\langle D^k T, \varphi \rangle = (-1)^{|k|} \langle T, D^k \varphi \rangle} \qquad (11)$$

Proposition : toute distribution T a des dérivées successives à tous les ordres et on peut intervertir l'ordre des dérivations.

Cas particulier important

$\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ opérateur Laplacien

soit la fonction : $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x, y, z) \xmapsto{f} (x^2+y^2+z^2)^{-1/2} = \dfrac{1}{r}$

quand $r \to 0^+$, $\dfrac{1}{r} \to +\infty$; cependant la fonction f est sommable au voisinage de 0.

En effet, le changement de variables (coordonnées sphériques)

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \cos\theta & 0 \leq \theta < 2\pi \\ y = r \cos\varphi \sin\theta & -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ z = r \sin\varphi & r > 0 \end{cases}$$

dont le module du Jacobien est $r^2 \cos\varphi$, conduit à :

$$\iiint_A (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\, dx\, dy\, dz = \iiint_B \frac{1}{r} r^2 \cos\varphi \, dr\, d\theta\, d\varphi$$

(B est l'ensemble parcouru par (r, θ, φ) quand (x, y, z) parcourt A).

$(r \cos\varphi)$ étant sommable au voisinage de l'origine, il en est de même pour $(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$.

$(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$ étant localement sommable, elle définit une distribution régulière dont on peut calculer le Laplacien <u>au sens des distributions</u>.

on démontre que : $\boxed{\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta}$ (12) (voir annexe p. 15)

Dérivées de δ

Dans $\mathbb{R}^3$, δ admet 3 dérivées partielles du 1er ordre.

exemple : $\langle \delta'_x, \varphi \rangle = -\langle \delta, \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \rangle = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0,0)$

$\langle \delta''_{xy}, \varphi \rangle = \langle \delta, \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \rangle = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(0,0,0)$

9. Produit de convolution de distributions

9.1. Définition - Conditions d'existence - Propriétés

Si f et g sont dans $L^1(\mathbb{R})$, on sait que $f*g$ est aussi dans $L^1(\mathbb{R})$.
On peut donc définir la distribution régulière attachée à $f*g$.

$$<T_{f*g}, \varphi> = \int_{\mathbb{R}} f*g\,(t)\,\varphi(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau\right] \varphi(t)\,dt$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x)g(y)\varphi(x+y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}} f(x)\left[\int_{\mathbb{R}} g(y)\,\varphi(x+y)\,dy\right] dx = <T_f, <T_g, \varphi(x+y)>>$$

On définit le produit de convolution de 2 distributions par généralisation du résultat précédent.

Soient S et T deux distributions sur $\mathcal{D}$. On appelle produit de convolution la distribution, notée $S*T$ lorsqu'elle existe, définie par :

$$\boxed{<S*T, \varphi> = <S_x, <T_y, \varphi(x+y)>>} \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D} \qquad (13)$$

Le membre de droite de l'égalité précédente a la signification suivante :

1°/ Pour chaque valeur de x, on définit la fonction f de la variable y par : $f(y) = \varphi(x+y)$

Cette fonction appartient à $\mathcal{D}$ et l'application : $f \longmapsto <T, f>$ est bien définie.

On note : $<T, f> = <T_y, \varphi(x+y)> = \theta(x)$ pour indiquer que la distribution T s'applique à $\varphi(x+y)$ considérée comme fonction de y et que le résultat dépend donc de x.

2°/ On applique ensuite (lorsque c'est possible) S à la fonction θ. On note le résultat $<S_x, \theta(x)> = <S_x, <T_y, \varphi(x+y)>>$.

Conditions d'existence

$<S_x, \theta(x)>$ n'est pas toujours défini, car la fonction θ n'est pas en général à support borné.
On admettra que :

- Si l'une au moins des 2 distributions a un support borné, $S*T$ existe.
- Si S et T sont à supports bornés, $S*T$ est à support borné.
- Si S et T sont à supports bornés à gauche (respectivement à droite), alors $S*T$ existe et son support est borné à gauche (respectivement à droite).

Lorsque S et T sont des distributions régulières attachées à des fonctions localement sommables f et g, $S*T$ coïncide avec la distribution régulière attachée à $f*g$.
Les conditions sur les supports énoncées ci-dessus assurent l'existence de $f*g$.
On peut de plus énoncer le résultat suivant :

- Si f est sommable sur $\mathbb{R}$ et g bornée, $f*g$ existe et est bornée (à faire en exercice).

Propriétés

Le produit de convolution est commutatif et distributif par rapport à l'addition.
La commutativité signifie que : $<S_x, <T_y, \varphi(x+y)>> = <T_y, <S_x, \varphi(x+y)>>$.

9.2 Convolution par δ

$$\boxed{\begin{aligned}\delta * T &= T \\ \delta_a * T(x) &= T(x-a)\end{aligned}} \quad (14) \qquad \boxed{\begin{aligned}\delta_a * \delta_b &= \delta_{a+b} \\ \delta^{(m)} * T &= T^{(m)}\end{aligned}} \quad (15)$$

Démonstrations

1°/ $\delta * T$ a un sens (voir conditions énoncées ci-dessus)

$<\delta * T, \varphi> = <T_y, <\delta(x), \varphi(x+y)>> = <T_y, \varphi(y)> = <T, \varphi> \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$

Donc : $\delta * T = T$ c'est-à-dire que <u>δ est l'élément neutre de la convolution</u>

Cette égalité est souvent écrite de manière incorrecte par les physiciens :

$$\int_{\mathbb{R}} f(t-\tau)\,\delta(\tau)\,d\tau = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau = f(t)$$

2°/ $<\delta_a * T, \varphi> = <T_y, <\delta(x-a), \varphi(x+y)> = <T_y, \varphi(a+y)> = <T(y-a), \varphi(y)>$

Translater une distribution, c'est la convoluer par δ_a.

3°/ Cas particulier : $T = \delta_b = \delta(y-b)$

En appliquant le résultat précédent, on obtient $\delta_a * \delta_b = \delta(y-b-a) = \delta_{a+b}$

4°/ $<\delta' * T, \varphi> = <T_y, <\delta'(x), \varphi(x+y)>> = -<T_y, \varphi'(y)> = <T', \varphi>$

On démontre de la même manière que $\delta^{(m)} * T = T^{(m)}$

<u>Dériver m fois une distribution T, c'est la convoluer par $\delta^{(m)}$</u> !

9.3. <u>Produit de convolution de n distributions</u> ($n>2$)

On peut définir le produit de convolution de 3 distributions R, S, T par :

$<R*S*T, \varphi> = <R_z, <T_y, <S_x, \varphi(x+y+z)>>>$

Ce produit n'a pas toujours un sens, mais s'il est bien défini, alors il est associatif, c'est-à-dire : $R*S*T = R*(S*T) = (R*S)*T$

Attention : si $(R*S*T)$ n'est pas défini, $R*(S*T)$ et $(R*S)*T$ peuvent exister sans être égaux.

Exemple : $(1*\delta')*\theta = 0*\theta = 0$ (θ : distribution régulière attachée
$1*(\delta'*\theta) = 1*\theta' = 1*\delta = 1$ à l'échelon unité)

On admettra que le produit de convolution de plusieurs distributions est bien défini dans les cas suivants (il est alors associatif) :

- toutes les distributions, sauf une au plus, ont leur support borné
- toutes les distributions ont leur support borné à gauche (respectivement à droite)

<u>Applications</u> : soit T une distribution de la forme $T = R*S$.
Alors, $\delta_a * T$ est bien définie sur $\mathcal{D}$ puisque δ_a est à support borné.

$$\begin{aligned}(R*S)(x-a) = T(x-a) = \delta_a * T &= \delta_a * (R*S) = (\delta_a * R)*S = R(x-a)*S(x) \\ &= \delta_a * (S*R) = (\delta_a * S)*R = S(x-a)*R(x)\end{aligned}$$

<u>Pour translater un produit de convolution, on translate un des facteurs</u>.

$$\begin{aligned}(R*S)' = T' = \delta' * T &= \delta' * (R*S) = (\delta' * R)*S = R'*S \\ &= \delta' * (S*R) = (\delta' * S)*R = S'*R\end{aligned}$$

<u>Pour dériver un produit de convolution, on dérive un des facteurs</u>.

10. Fonction de Green d'un opérateur différentiel

On cherche à résoudre une équation du type

$$Du = f, \qquad \text{(e1)}$$

où D est un opérateur différentiel linéaire, f est une distribution connue et u une distribution inconnue.
On lui associe l'équation dite homogène

$$Dh = 0 \qquad \text{(e0)}$$

Si on connaît une solution particulière u_p de (e1), alors $D(u - u_p) = 0$. Il s'ensuit que $u - u_p$ est une solution de l'équation homogène. L'ensemble des solutions de (e1) peut donc s'écrire $u = u_p + h$, où h décrit l'ensemble des solutions de l'équation homogène.

Définition

On appelle fonction de Green de l'opérateur différentiel D, une distribution G telle que

$$DG = \delta. \qquad \text{(eg)}$$

Remarque. Cette distribution n'est pas unique. En effet $G + h$, où h est une solution de l'équation homogène (e0), est aussi une fonction de Green, car

$$D(G + h) = DG + Dh = DG = \delta.$$

Proposition
Si on connaît une fonction de Green G d'un opérateur différentiel D, alors l'ensemble des solutions de (e1)s'écrit:

$$u = (G * f) + h.$$

Démonstration
$D(G * f) = DG * f = \delta * f = f$.
Donc, $u_p = G * f$ est une solution particulière de (e1). Et on ajoute une solution quelconque de l'équation homogène.

annexe

calcul du laplacien de $\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

1°) Pour $r \neq 0$, on vérifie que $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0$.

2°) La fonction $\frac{1}{r}$ est localement sommable. En effet:

$$\iiint_{r<\varepsilon} \frac{1}{r} dv = \iiint_{r<\varepsilon} \frac{1}{r} r^2 \sin\theta \, dr d\theta d\varphi = \iiint_{r<\varepsilon} r \sin\theta \, dr d\theta d\varphi \, ;$$

cette intégrale est donc finie; on peut définir la distribution attachée à la fonction $\frac{1}{r}$ et calculer le laplacien de cette distribution.

3°) Pour calculer la distribution $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)$, il faut l'appliquer sur une fonction test $\psi \in D$.

$$< \Delta\left(\frac{1}{r}\right), \psi > = < \frac{1}{r}, \Delta\psi > = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{r} \Delta\psi \, dv = \lim_{\varepsilon \to 0} \iiint_{r>\varepsilon} \frac{1}{r} \Delta\psi \, dv \, .$$

On intègre donc sur un volume constitué par tout l'espace privé de la boule de centre O et de rayon ε. La normale "extérieure" au volume est orientée vers l'intérieur de la boule.

4°) On admet la formule de Green:

$$\iiint_V (f \, \Delta g - g \, \Delta f) dv = \iint_S (f \, \vec{n} \, . \overrightarrow{grad} \, g - g \, \vec{n} . \overrightarrow{grad} \, f) dS \, ,$$

où $\vec{n}$ représente un vecteur unitaire, normal à la surface, et orienté vers l'extérieur du volume.

5°) On applique la formule de Green pour le calcul de $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)$.

$$\iiint_{r>\varepsilon} \left(\frac{1}{r} \Delta\psi - \psi \, \Delta\left(\frac{1}{r}\right) \right) dv = \iint_{r=\varepsilon} \left(\frac{1}{r} \vec{n} \, . \overrightarrow{grad} \, \psi - \psi \, \vec{n} \, . \overrightarrow{grad} \frac{1}{r} \right) dS \, ,$$

$$\iiint_{r>\varepsilon} \frac{1}{r} \Delta\psi \, dv = \iiint_{r>\varepsilon} \psi \, \Delta\left(\frac{1}{r}\right) dv + \iint_{r=\varepsilon} \frac{1}{r} \vec{n} . \overrightarrow{grad} \psi \, dS - \iint_{r=\varepsilon} \psi \, \vec{n} . \overrightarrow{grad} \frac{1}{r} dS. \qquad \text{(E)}$$

Puisque la normale "extérieure" au volume est orientée vers l'intérieur de la boule de centre O et de rayon ε, on a $\vec{n} = -\vec{e}_r$; d'autre part $dS = r^2 \sin\theta \, d\theta d\varphi$.

a) Le premier terme de l'égalité (E) est nul à cause de $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)$.

b) Le deuxième terme de (E) vaut

$$I_1 = \iint_{r=\varepsilon} \frac{1}{r}\vec{n}\,.\,\overrightarrow{grad}\,\psi\,dS = -\iint_{r=\varepsilon} r\,sin\theta\,(\vec{e}_r\,.\,\overrightarrow{grad}\psi\,)d\theta d\varphi = -\varepsilon\iint_{r=\varepsilon} sin\theta\,(\vec{e}_r\,.\,\overrightarrow{grad}\psi\,)d\theta d\varphi\,;$$

la fonction à intégrer étant bornée, l'intégrale est finie; par conséquent $I_1 \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$.

c) On calcule enfin le troisième terme de (E), en se rappelant que $\overrightarrow{grad}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\vec{e}_r$;

$$I_2 = -\iint_{r=\varepsilon} \psi\,\vec{n}\,.\,\overrightarrow{grad}\frac{1}{r}dS = -\iint_{r=\varepsilon} \psi(\varepsilon,\theta,\varphi)\,sin\theta\,d\theta d\varphi = -\iint_{r=\varepsilon} \psi(\varepsilon,\theta,\varphi)\,d\mu \quad , \quad d\mu = sin\,\theta\,d\theta d\varphi\,;$$

le théorème de la moyenne, appliqué à la fonction ψ, affirme qu'il existe au moins un point $M(\varepsilon,\theta_\varepsilon,\varphi_\varepsilon)$ de la surface de la sphère de centre O et de rayon ε tel que

$$\iint_{r=\varepsilon} \psi(\varepsilon,\theta,\varphi)\,d\mu = \psi(\varepsilon,\theta_\varepsilon,\varphi_\varepsilon)\iint_{r=\varepsilon} d\mu = \psi(\varepsilon,\theta_\varepsilon,\varphi_\varepsilon)\iint_{r=\varepsilon} sin\theta\,d\theta d\varphi = 4\pi\psi(\varepsilon,\theta_\varepsilon,\varphi_\varepsilon)\,;$$

comme ψ est continue en $r = 0,$ on peut écrire $\lim_{\varepsilon\to 0}\psi(\varepsilon,\theta_\varepsilon,\varphi_\varepsilon) = \psi(r = 0)$.

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_2 = -\lim_{\varepsilon\to 0} 4\pi\psi(\varepsilon,\theta_\varepsilon,\varphi_\varepsilon) = -4\pi\psi(0) = -4\pi < \delta,\psi >.$$

6°) Finalement, quelle que soit la fonction test ψ, on a

$$< \Delta\left(\frac{1}{r}\right),\psi > = -\,4\pi < \delta,\psi >,$$

et on en déduit

$$\boxed{\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta}\,.$$

VI. La transformation de Fourier des distributions

1. Définitions - Espaces $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$

1.1. Transformée de Fourier d'une distribution régulière

Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{D}$.

$$<\mathcal{F}f, \varphi> = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\varphi(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt\right]\varphi(\omega)\,d\omega = \iint_{\mathbb{R}^2} f(t)\varphi(\omega)e^{-i\omega t}d\omega\, dt$$

On peut en effet appliquer le théorème de Fubini car $|f(t)\varphi(\omega)e^{-i\omega t}| = |f(t)||\varphi(\omega)|$ est sommable dans $\mathbb{R}^2$, comme produit d'une fonction sommable de t par une fonction sommable de ω.

$$<\mathcal{F}f, \varphi> = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\omega)e^{-i\omega t}d\omega\right]f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\varphi}(t)f(t)\,dt = <f, \mathcal{F}\varphi>$$

Cette formule reste valable si $\varphi \in L^1$, sans appartenir à $\mathcal{D}$, car alors $\hat{f}$ et $\hat{\varphi}$ sont bornées ; $<\mathcal{F}f, \varphi>$ et $<f, \mathcal{F}\varphi>$ ont donc un sens.

Les considérations précédentes conduisent à définir la transformée de Fourier d'une distribution T quelconque par l'égalité : $<\mathcal{F}T, \varphi> = <T, \mathcal{F}\varphi>$.
La difficulté vient de ce que, si $\varphi \in \mathcal{D}$, $\hat{\varphi} \notin \mathcal{D}$ (sauf si $\varphi = 0$).
On démontre en effet le résultat suivant que l'on admettra :

<u>Proposition 1</u> : <u>si f est une fonction sommable, à support borné dans $\mathbb{R}$, alors sa transformée de Fourier $\hat{f}$ n'est pas à support borné</u> (sauf si f est presque partout nulle)

L'expression $<T, \mathcal{F}f>$ n'étant pas définie pour T quelconque $\in \mathcal{D}'$, on se restreint à un sous-espace de $\mathcal{D}'$ dans lequel la T.F. d'une distribution est bien définie.

1.2. Espaces $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$

<u>Espace $\mathcal{S}$</u> : c'est l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, indéfiniment dérivables, décroissant quand $|t| \to +\infty$, ainsi que toutes leurs dérivées, plus vite que toute puissance de $1/|t|$.

Cette définition entraîne que, $\forall \varphi \in \mathcal{S}$ et quels que soient les entiers n et k,

$|\varphi^{(n)}(t)| < \dfrac{1}{|t|^k}$ pour t assez grand.

Donc : $\forall n$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, la fonction $|t|^k\,|\varphi^{(n)}(t)|$ est bornée.

Comme la fonction $|t|^{k+2}\,|\varphi^{(n)}(t)|$ est elle-même bornée par une constante M, on en déduit que $|t|^k\,|\varphi^{(n)}(t)|$ est sommable, car bornée par M/t^2.

$\mathcal{D}$ est un sous-espace de $\mathcal{S}$. On définit dans $\mathcal{S}$ une notion de convergence. Elle vérifie la propriété suivante : si $\varphi_n \to \varphi$ au sens de $\mathcal{D}$, $\varphi_n \to \varphi$ au sens de $\mathcal{S}$.

<u>Proposition 2</u> : si $\varphi \in \mathcal{S}$, alors sa transformée de Fourier $\hat{\varphi}$ est aussi dans $\mathcal{S}$.

Cette proposition se démontre sans difficulté, en utilisant les propriétés des fonctions $\varphi \in \mathcal{S}$ que l'on vient d'énoncer, ainsi que le théorème 2 (§ 4.2) du chapitre "transformation de Fourier des fonctions d'une variable réelle".

Espace $\mathcal{S}'$: on appelle distribution à croissance lente ou tempérée, toute application linéaire continue sur $\mathcal{S}$.
Les distributions tempérées constituent un sous-espace vectoriel $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$.

Exemples de distributions tempérées

• Toute fonction à croissance lente, c.a.d. telle qu'il existe une constante A et un entier positif m vérifiant $|f(t)| \leq A\,|t|^m$ définit une distribution régulière tempérée ; En effet, si $\varphi \in \mathcal{S}$, il existe une constante B telle que : $|\varphi(t)| \leq \dfrac{B}{|t|^{m+2}}$.

Donc : $|f(t)\,\varphi(t)| \leq \dfrac{AB}{|t|^2}$ est sommable et $<f, \varphi>$ a un sens.

• Toute fonction sommable définit une distribution régulière tempérée (car $\varphi \in \mathcal{S}$ est bornée)
• Toute fonction bornée définit une distribution régulière tempérée (car $\varphi \in \mathcal{S}$ est sommable)
• Toute distribution à support borné est tempérée (car, dans ce cas, $<T, \varphi>$ a un sens pour toutes les fonctions φ indéfiniment dérivables)
• Si T est une distribution tempérée, il en est de même de ses dérivées successives (car $<T', \varphi> = -<T, \varphi'>$ et bien définie puisque si $\varphi \in \mathcal{S}$, $\varphi' \in \mathcal{S}$)
• Si T est tempérée et si ψ est un polynôme, $(\psi\, T)$ est une distribution tempérée (car $<\psi T, \varphi> = <T, \psi\varphi>$ est bien défini puisque si $\varphi \in \mathcal{S}$, $\psi\varphi \in \mathcal{S}$)

1.3. Transformée de Fourier des distributions tempérées

Puisque $\varphi \in \mathcal{S}$ entraîne que $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}$, on définit la transformée de Fourier d'une distribution tempérée par :

$$(1)\quad \boxed{<\mathcal{F}T, \varphi> = <T, \mathcal{F}\varphi>} \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

on vérifie que $\mathcal{F}T$ est bien une application linéaire continue de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{C}$.
on définit de la même manière la transformée de Fourier inverse:

$$\boxed{<\overline{\mathcal{F}}T, \varphi> = <T, \overline{\mathcal{F}}\varphi>} \qquad \overline{\mathcal{F}}\varphi(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, e^{i\omega t}\, dt$$

Remarque :

soit $f \in L^1(\mathbb{R})$; elle définit une distribution régulière tempérée T_f.

on note $\hat{f}$ la transformée de Fourier de f et $\widehat{T_f}$ la transformée de Fourier de la distribution T_f.

$$<\widehat{T_f}, \varphi> = <T_f, \hat{\varphi}> = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)\,\hat{\varphi}(\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\, e^{-i\omega u}\, du\, d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)\, e^{-i\omega u}\, d\omega\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\, \hat{f}(u)\, du = <T_{\hat{f}}, \varphi>$$

On en déduit, pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, que $\widehat{T_f} = T_{\hat{f}}$

2. Propriétés de la transformation de Fourier des distributions tempérées

2.1. Propriétés élémentaires

- **Translation**

On cherche à exprimer la transformée de Fourier de la distribution $T(t-a)$ translatée de $T(t)$, en fonction de la transformée $\hat{T}(\omega)$ de $T(t)$.

$$\langle \mathcal{F}[T(t-a)], \varphi(\omega)\rangle = \langle T(t-a), \hat{\varphi}(t)\rangle = \langle T(t), \hat{\varphi}(t+a)\rangle = \langle T(t), \mathcal{F}[e^{-i\omega a}\varphi(\omega)]\rangle$$
$$= \langle \hat{T}(\omega), e^{-i\omega a}\varphi(\omega)\rangle = \langle e^{-i\omega a}\hat{T}(\omega), \varphi(\omega)\rangle$$

(la dernière égalité étant vraie car $e^{-i\omega a}$ est indéfiniment dérivable)

On en déduit que : $\mathcal{F}[T(t-a)](\omega) = e^{-i\omega a}\hat{T}(\omega) = e^{-i\omega a}\mathcal{F}[T(t)](\omega)$

$\overline{\mathcal{F}}[T(t-a)](\omega) = e^{i\omega a}\,\overline{\mathcal{F}}[T(t)](\omega)$

- **Modulation**

Vérifier que : $\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t}T(t)](\omega) = \{\mathcal{F}[T(t)]\}(\omega-\omega_0) = \hat{T}(\omega-\omega_0)$ et $\overline{\mathcal{F}}[e^{i\omega_0 t}T] = \{\overline{\mathcal{F}}T\}(\omega+\omega_0)$

- **Changement d'échelle**

Comme pour les fonctions : $\mathcal{F}[T(at)] = \frac{1}{|a|}\hat{T}\left(\frac{\omega}{a}\right)$

En effet :

$$\langle \mathcal{F}[T(at)], \varphi(\omega)\rangle = \langle T(at), \hat{\varphi}(t)\rangle = \langle T(t), \frac{1}{|a|}\hat{\varphi}\left(\frac{t}{a}\right)\rangle = \langle T(t), \mathcal{F}[\varphi(a\omega)]\rangle$$
$$= \langle \hat{T}(\omega), \varphi(a\omega)\rangle = \langle \frac{1}{|a|}\hat{T}\left(\frac{\omega}{a}\right), \varphi(\omega)\rangle$$

2.2. Dérivation

Les formules établies pour les fonctions s'étendent aux distributions tempérées.

$$\boxed{\begin{aligned}(\mathcal{F}T)^{(n)} &= \mathcal{F}[(-it)^n\,T(t)]\\ \mathcal{F}T^{(n)} &= (i\omega)^n\,\mathcal{F}T\end{aligned}} \qquad (2)\ \ \forall n\in\mathbb{N} \qquad \boxed{\begin{aligned}(\overline{\mathcal{F}}T)^{(n)} &= \overline{\mathcal{F}}[(it)^n\,T(t)]\\ \overline{\mathcal{F}}T^{(n)} &= (-i\omega)\,\overline{\mathcal{F}}T\end{aligned}}$$

Démonstration de la 1ère égalité

$$\langle(\mathcal{F}T)^{(n)}, \varphi(\omega)\rangle = (-1)^n\langle \mathcal{F}T, \varphi^{(n)}(\omega)\rangle = (-1)^n\langle T, \mathcal{F}[\varphi^{(n)}(\omega)]\rangle$$
$$= (-1)^n\langle T(t), (it)^n\hat{\varphi}(t)\rangle = (-1)^n\langle (it)^n T(t), \hat{\varphi}(t)\rangle = \langle \mathcal{F}[(-it)^n T(t)], \varphi(\omega)\rangle$$

(faire la démonstration de la 2ème égalité à titre d'exercice)

2.3. Formule de réciprocité de Fourier

Toute fonction $\varphi\in\mathcal{S}$ vérifie les hypothèses du théorème 3 d'inversion, énoncé dans le chapitre concernant la T.F. des fonctions d'une variable réelle.
De plus puisque $\hat{\varphi}\in\mathcal{S}$ elle est sommable. Il s'ensuit que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\varphi}(\omega)\,e^{i\omega t}\,dt = \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{+A}\hat{\varphi}(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega$$

Enfin, puisque φ est continue, $\frac{1}{2}\left(\varphi(t+0)+\varphi(t-0)\right) = \varphi(t)$

Donc : $\forall\varphi\in\mathcal{S}$, $\quad \varphi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\varphi}(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega$

ou encore : $\boxed{\varphi = \overline{\mathcal{F}}\hat{\varphi} = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}\varphi} \qquad \forall\varphi\in\mathcal{S}$

De même : $\forall\varphi\in\mathcal{S} \qquad \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}\varphi = \varphi$

Soit T une distribution tempérée.

$$<\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}T, \varphi> = <\mathcal{F}T, \overline{\mathcal{F}}\varphi> = <T, \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}\varphi> = <T, \varphi>$$

Donc : $\boxed{\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}T = T}$ et de même $\boxed{\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}T = T}$ $\quad \forall T \in \mathcal{S}'$

Autrement dit, si $\mathcal{F}T = U$, alors $\overline{\mathcal{F}}U = T$

Conséquence (unicité de l'original de Fourier)

- Soient 2 distributions tempérées T_1 et T_2 telles que $\mathcal{F}T_1 = \mathcal{F}T_2$

  on en déduit : $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}T_1 = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}T_2$, donc $T_1 = T_2$.

- Soient 2 fonctions f_1 et f_2 appartenant à $L^1(\mathbb{R})$, telles que $\hat{f_1} = \hat{f_2}$

$$\hat{f_1} = \hat{f_2} \iff T_{\hat{f_1}} = T_{\hat{f_2}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{remarque} \\ \text{du §1.3.}}}{\iff} \widehat{T_{f_1}} = \widehat{T_{f_2}} \iff T_{f_1} = T_{f_2} \iff f_1 = f_2$$

(égalité presque partout)

Pour f_1 et $f_2 \in L_1(\mathbb{R})$, $f_1 = f_2$ (presque partout) $\iff \hat{f_1} = \hat{f_2}$

3. Les résultats importants

$$<\mathcal{F}\delta, \varphi> = <\delta, \mathcal{F}\varphi> = <\delta(\omega), \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)e^{-i\omega t}dt> = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,dt = <1, \varphi> \quad (\forall\varphi\in\mathcal{S})$$

(la fonction constante $f = 1$ définit une distribution régulière tempérée).

on en déduit : $\boxed{\mathcal{F}\delta = 1}$ et de même $\boxed{\overline{\mathcal{F}}\delta = 1/2\pi}$ $\quad$ (3.1)

Par application de la formule de réciprocité, on obtient :

$\boxed{\overline{\mathcal{F}}1 = \delta}$ $\quad$ $\boxed{\mathcal{F}1 = 2\pi\delta}$ $\quad$ (3.2)

Les propriétés énoncées au paragraphe 2 conduisent aux résultats suivants :

$\mathcal{F}[\delta(t-a)] = e^{-i\omega a}$	$\overline{\mathcal{F}}[\delta(t-a)] = \frac{1}{2\pi}e^{i\omega a}$
$\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$	$\overline{\mathcal{F}}[e^{i\omega_0 t}] = \delta(\omega+\omega_0)$
$\mathcal{F}[\delta^{(n)}(t)] = (i\omega)^n$	$\overline{\mathcal{F}}[\delta^{(n)}(t)] = \frac{1}{2\pi}(-i\omega)^n$
$\mathcal{F}[(-it)^n] = 2\pi\,\delta^{(n)}(\omega)$	$\overline{\mathcal{F}}[(+it)^n] = \delta^{(n)}(\omega)$

(3.3)

4. Transformation de Fourier et produit de convolution

On admettra le résultat suivant : si T est une distribution tempérée et S une distribution à support borné, S∗T a un sens ; c'est une distribution tempérée qui vérifie

$$\boxed{\mathcal{F}(S*T) = \mathcal{F}S.\mathcal{F}T} \qquad (4.1)$$

le 2ème membre (produit de 2 distributions) a également un sens car $\mathcal{F}T$, transformée de Fourier d'une distribution à support borné est une fonction indéfiniment dérivable (admis).
De même :

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\overline{\mathcal{F}}(S*T) = \overline{\mathcal{F}}S\cdot\overline{\mathcal{F}}T}$$

Ces égalités restent valables toutes les fois que chacun des membres a un sens.

Et, par la formule de réciprocité :

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{F}(S.T) &= \frac{1}{2\pi}(\mathcal{F}S*\mathcal{F}T)\\ \overline{\mathcal{F}}(S.T) &= \overline{\mathcal{F}}S*\overline{\mathcal{F}}T\end{aligned}} \qquad (4.2)$$

(à condition que les 2 membres des égalités aient un sens)

Cette propriété de transformer le produit de convolution en produit multiplicatif est la propriété essentielle de la transformation de Fourier.

5. Formules sommatoire de Poisson

Résultats préliminaires sur les peignes de Dirac

$Ш(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-n)$ est une distribution tempérée (à vérifier).

Elle est périodique, de période 1.

$$Ш\left(\frac{t}{T_0}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\frac{t}{T_0}-n\right) = T_0\sum_n\delta(t-nT_0) \qquad (5.1)$$

En effet : $\left\langle\delta\left(\frac{t}{T_0}-n\right),\varphi(t)\right\rangle = \left\langle\delta_n\left(\frac{t}{T_0}\right),\varphi(t)\right\rangle = T_0\langle\delta_n(t),\varphi(tT_0)\rangle$

$= T_0\,\varphi(nT_0) = \langle T_0\,\delta(t-nT_0),\varphi(t)\rangle$

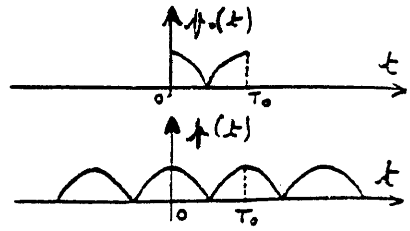
on en déduit : $\delta\left(\frac{t}{T_0}-n\right) = T_0\,\delta(t-nT_0)$

En physique, on utilise plutôt le peigne de Dirac $\sum_n\delta(t-nT_0)$ pour respecter l'homogénéité des formules (t et T_0 sont, par exemple, des temps).

Cette distribution est périodique, de période T_0.

Transformée de Fourier de la distribution régulière attachée à une fonction périodique

Soit $p(t)$ une fonction T_0 - périodique.



Son graphe s'obtient à partir du graphe du "motif" $p_0(t)$, en translatant celui-ci de $\pm T_0$ une infinité de fois. On suppose que $p_0(t)$ est bornée (donc sommable) et que $p(t)$ est décomposable en série de Fourier.

$$p_0(t) = \begin{cases} p(t) & 0 \leq t < T_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_0(t - nT_0) = p_0(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0) \qquad (5.2)$$

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(p)\, e^{in\omega_0 t} \qquad (5.3)$$

$p(t)$ n'appartient pas à $L^1(\mathbb{R})$ - Elle n'admet donc pas de transformée de Fourier au sens des fonctions - Par contre, elle admet une transformée de Fourier au sens des distributions; en effet, $p(t)$ s'écrivant comme produit de convolution d'une distribution à support borné ($p_0(t)$) par une distribution tempérée est elle-même une distribution tempérée (cf. §4) - On peut calculer $\hat{p}(\omega)$.

Par transformation de Fourier, l'égalité (5.3) devient :

$$\boxed{\hat{p}(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(p)\, \delta(\omega - n\omega_0)} \qquad (5.4)$$

Proposition : Toute fonction T_0- périodique, bornée, a une transformée de Fourier (au sens des distributions) formée d'impulsions de Dirac aux points d'abscisses multiples de $2\pi/T_0$; les coefficients de ces impulsions sont les coefficients de Fourier de la fonction multipliés par 2π.

Formule sommatoire de Poisson

Par transformation de Fourier, l'égalité (5.2) devient :

$$\hat{p}(\omega) = \hat{p}_0(\omega) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-in\omega T_0} \qquad (5.5)$$

D'autre part : $C_n(p) = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} p(t)\, e^{-in\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\infty}^{+\infty} p_0(t)\, e^{-in\omega_0 t}\, dt$

$$C_n(p) = \frac{1}{T_0}\, \hat{p}_0(n\omega_0)$$

L'égalité (5.4) s'écrit alors :

$$\hat{p}(\omega) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{p}_0(n\omega_0)\, \delta(\omega - n\omega_0) = \omega_0\, \hat{p}_0(\omega) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \qquad (5.6)$$

La comparaison de (5.5) et (5.6) prouve que :

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-in\omega T_0} = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_0)} \qquad (5.7) \qquad \left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}\right)$$

Pour $T_0 = 1$

$$\sum_n e^{-in\omega} = 2\pi \sum_n \delta(\omega - n2\pi) = \sum_n \delta\left(\frac{\omega}{2\pi} - n\right)$$

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-in\omega} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - n)} \qquad (5.8) \qquad \left(\nu = \frac{\omega}{2\pi}\right)$$

Transformée de Fourier d'un peigne de Dirac

Elle se déduit de l'égalité (5.7).

Soit : $Ш(t) = \sum_n \delta(t-n)$

$$\mathcal{F}[Ш(t)] = \sum_n \mathcal{F}[\delta(t-n)] = \sum_n e^{in\omega} = \sum_n \delta\left(\frac{\omega}{2\pi} - n\right) = \sum_n \delta(\nu - n)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-n) \xrightarrow{T.F} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - n) \qquad (\omega = 2\pi\nu)$$

La transformée de Fourier d'un peigne de Dirac est un peigne de Dirac.

Plus généralement, en utilisant la propriété écrite au début du § 5, on montre que :

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0) \xrightarrow{T.F} \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_0)} \qquad (5.9)$$

Soit f une fonction bornée, à support borné.

La distribution $f(t) * \sum_n \delta(t - nT_0) = \sum_n f(t - nT_0)$ est tempérée et T_0-périodique.

On notera que la largeur du support de f n'est pas nécessairement égale à T_0.

$$\mathcal{F}\left[\sum_n f(t - nT_0)\right] = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}\left[\sum_n \delta(t - nT_0)\right] = \hat{f}(\omega)\, \omega_0 \sum_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

$\hat{f}(\omega)\, \delta(\omega - n\omega_0)$ a bien un sens, car $\hat{f}$ est indéfiniment dérivable, puisque f est à support borné.

$$\mathcal{F}\left[\sum_n f(t-nT_0)\right] = \omega_0 \sum_n \hat{f}(n\omega_0)\,\delta(\omega-n\omega_0) \qquad \text{(propriété de } \delta)$$

La formule de réciprocité de Fourier, appliquée à la distribution $\sum_n f(t-nT_0)$ donne :

$$\sum_n f(t-nT_0) = \overline{\mathcal{F}}\left[\omega_0 \sum_n \hat{f}(n\omega_0)\,\delta(\omega-n\omega_0)\right] = \frac{\omega_0}{2\pi}\sum_n \hat{f}(n\omega_0)\,e^{in\omega_0 t}$$

on en déduit une autre forme de la formule sommatoire de Poisson :

(5.10) $$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t-nT_0) = \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}\left(n\frac{2\pi}{T_0}\right) e^{in2\pi t/T_0}}$$ <u>égalité de 2 distributions</u>

Remarques :

- f étant à support borné, la somme qui figure dans le 1er membre ne contient qu'un nombre fini de termes
- l'égalité des deux distributions entraîne l'égalité des fonctions, presque partout sur $\mathbb{R}$

Lorsque l'égalité est vraie pour $t=0$, on obtient comme cas particulier : $\sum_n f(nT) = \frac{1}{T}\sum_n \hat{f}\left(\frac{2\pi n}{T}\right)$

Cette dernière relation se démontre très simplement, <u>pour $\varphi \in \mathcal{S}$</u>, en appliquant la définition de la T.F. d'une distribution.

$$\sum_n \hat{\varphi}\left(\frac{2\pi}{T}n\right) = \left\langle \sum_n \delta\left(\omega-\frac{2\pi}{T}n\right), \hat{\varphi}(\omega)\right\rangle = \left\langle \sum_n \delta\left(\omega-\frac{2\pi}{T}n\right), \mathcal{F}\varphi\right\rangle = \left\langle \mathcal{F}\left[\sum_n \delta\left(\omega-\frac{2\pi}{T}n\right)\right], \varphi(t)\right\rangle$$

$$= \left\langle T\sum_n \delta(t-nT), \varphi(t)\right\rangle = T\sum_n \varphi(nT)$$

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(nT) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}\left(\frac{2\pi}{T}n\right)} \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S} \qquad (5.11)$$

Pour $T=1$, $\quad \sum_n \varphi(n) = \sum_n \hat{\varphi}(2\pi n)$

Si on pose $\hat{\phi}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,e^{-i2\pi\nu t}\,dt = \hat{\varphi}(2\pi\nu)$

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}(n)} \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S} \qquad (5.12)$$

6. <u>Transformation de Fourier à plusieurs variables</u>

6.1. <u>Définition</u>

Notations : $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, $\quad \vec{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$

$\vec{\omega}.\vec{t} = \omega_1 t_1 + \cdots + \omega_n t_n$ $\quad$ produit scalaire de ces 2 vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Soit une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$; sa transformée de Fourier $\hat{f}(\vec{\omega})$ est définie par :

$$\boxed{[\mathcal{F}f](\vec{\omega}) = \hat{f}(\vec{\omega}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{t})\,e^{-i\vec{\omega}.\vec{t}}\,d\vec{t}}$$ et sa T.F. inverse $$\boxed{[\overline{\mathcal{F}}f](\vec{\omega}) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{t})\,e^{i\vec{\omega}.\vec{t}}\,d\vec{t}}$$

En dimension 2 : $\hat{f}(\omega_1, \omega_2) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(t_1, t_2)\, e^{-i(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2)}\, dt_1\, dt_2$

Dans le cas simple où $f(t_1, t_2)$ est le produit de 2 fonctions sommables :
$f(t_1, t_2) = f_1(t_1)\, f_2(t_2)$

$$\hat{f}(\omega_1, \omega_2) = \iint_{\mathbb{R}^2} f_1(t_1) f_2(t_2)\, e^{-i\omega_1 t_1} e^{-i\omega_2 t_2}\, dt_1\, dt_2$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f_1(t_1) e^{-i\omega_1 t_1}\, dt_1 \int_{\mathbb{R}} f_2(t_2) e^{-i\omega_2 t_2}\, dt_2 = \hat{f}_1(\omega_1)\, \hat{f}_2(\omega_2)$$

6.2. Propriétés

Les propriétés établies pour une variable se généralisent à n variables. En voici quelques unes écrites en dimension 3, avec des notations de variables d'espace.
$\vec{X} = (x, y, z)$ $\quad \vec{K} = (k_1, k_2, k_3)$

	T. F. $\longrightarrow$
$f(\vec{X}) = f(x, y, z)$	$\hat{f}(\vec{K}) = \hat{f}(k_1, k_2, k_3)$
$f(\vec{X} - \vec{a}) = f(x - a_1, y - a_2, z - a_3)$	$\hat{f}(\vec{K}) e^{-i\vec{K}\cdot\vec{a}} = \hat{f}(k_1, k_2, k_3) e^{-i(k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3)}$
$f(\vec{X}) e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{X}} = f(x, y, z) e^{i(\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z)}$	$\hat{f}(\vec{K} - \vec{\alpha}) = \hat{f}(k_1 - \alpha_1, k_2 - \alpha_2, k_3 - \alpha_3)$
$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = f(\lambda \vec{X})$	$\frac{1}{\lvert\lambda\rvert^3} \hat{f}\left(\frac{k_1}{\lambda}, \frac{k_2}{\lambda}, \frac{k_3}{\lambda}\right) \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$
$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z)$	$i k_1 \hat{f}(k_1, k_2, k_3)$
$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$-(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) \hat{f}(k_1, k_2, k_3) = -\lvert k\rvert^2 \hat{f}$
$-i x f(x, y, z)$	$\frac{\partial \hat{f}}{\partial k_1}(k_1, k_2, k_3)$
$\delta(x, y, z)$	1
1	$(2\pi)^3 \delta(k_1, k_2, k_3)$
$\frac{\partial}{\partial x} \delta(x, y, z)$	$i k_1$
$-i x$	$(2\pi)^3 \frac{\partial}{\partial k_1} \delta(k_1, k_2, k_3)$
$\delta(\vec{X} - \vec{a}) = \delta(x - a_1, y - a_2, z - a_3)$	$e^{-i(a_1 k_1 + a_2 k_2 + a_3 k_3)}$
$e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{X}} = e^{i(\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z)}$	$(2\pi)^3 \delta(k_1 - \alpha_1, k_2 - \alpha_2, k_3 - \alpha_3)$

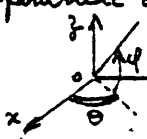
Cas particulier : transformée de Fourier d'une fonction radiale

Une fonction radiale $f(x, y, z)$ ne dépend que de $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. On suppose f sommable et on cherche à calculer sa T. F. au point $\vec{K} = (k_1, k_2, k_3)$.

$\hat{f}(\vec{K}) = \iiint_{\mathbb{R}^3} f(r)\, e^{-i\vec{K}\cdot\vec{X}}\, dx\, dy\, dz$. Montrons que c'est une fonction radiale.

On choisit l'axe $\vec{Oz}$ parallèle à $\vec{K}$ et de même sens, et on effectue le changement de variables :

$$\begin{cases} x = r \cos\varphi \cos\theta \\ y = r \cos\varphi \sin\theta \\ z = r \sin\varphi \end{cases}$$



$\vec{K}\cdot\vec{X} = k_1 x + k_2 y + k_3 z = k_3 z = \lvert\vec{K}\rvert\, \lvert\vec{X}\rvert \sin\varphi = k r \sin\varphi$

$$\hat{f}(\vec{K}) = \iiint f(r)\, e^{-ikr\sin\varphi}\, r^2 \cos\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi = \int_0^{+\infty} 2\pi r^2 f(r) \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-ikr\sin\varphi} \cos\varphi\, d\varphi\right] dr$$

$$= \int_0^{+\infty} 2\pi r^2 f(r) \times 2\frac{\sin kr}{kr}\, dr = \underline{\frac{4\pi}{k} \int_0^{+\infty} r f(r) \sin kr\, dr}$$ (ne dépend que de $k = \lvert\vec{K}\rvert$).

VII. La transformation de Laplace

1. Transformation de Laplace des fonctions

1.1 Définition

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, localement sommable, nulle pour $x<0$. La transformée de Laplace de f est la fonction de la variable complexe p, définie par l'intégrale (lorsqu'elle existe) :

$$\boxed{F(p) = \int_0^{+\infty} f(x)\, e^{-px}\, dx} \qquad p \in \mathbb{C}$$

$f(x)$ est l'originale ; $F(p)$ est l'image ; on écrit : $f(x) \sqsupset F(p)$

Autre notation pour la transformée : $F(p) = \mathcal{L}(f)(p)$

1.2. Existence - Abscisse de sommabilité

On rappelle que $f(x)e^{-px}$ sommable sur $\mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \begin{cases} \int_0^{+\infty} |f(x)e^{-px}|\,dx \text{ est fini} \\ \text{et } f(x)e^{-px} \text{ est mesurable} \end{cases}$

On pose : $p = \alpha + i\omega$ ($\alpha \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R}$)

$$|f(x)e^{-px}| = |f(x)|\,|e^{-(\alpha+i\omega)x}| = |f(x)|\, e^{-\alpha x}$$

La sommabilité de $f(x)e^{-px}$ ne dépend donc que de la partie réelle de p.

Lemme : si $f(x)\,e^{-px}$ est sommable pour $\alpha = \alpha_0$, elle est sommable pour tout $\alpha \geqslant \alpha_0$.

En effet : $|f(x)\,e^{-px}| = |f(x)|e^{-\alpha x} \leq |f(x)|e^{-\alpha_0 x}$

Proposition 1 : il existe $a \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que, pour tout $\alpha > a$, la fonction $f(x)\,e^{-px}$ est sommable et, pour tout $\alpha < a$, elle ne l'est pas.

Démonstration

- Si, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(x)e^{-\alpha x}$ est sommable, alors $a = -\infty$.
- Sinon, il existe $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ pour lequel $f(x)\,e^{-\alpha_1 x}$ n'est pas sommable.
  Soit $E = \{\alpha \in \mathbb{R} \,/\, f(x)\,e^{-\alpha x} \text{ est sommable}\} = \{\alpha \in \mathbb{R} \,/\, f(x)\,e^{-px} \text{ est sommable}\}$
  Si cet ensemble est vide, alors $a = +\infty$.
  Sinon, d'après le lemme, α_1 est un minorant de E ; E admet donc une borne inférieure b.
  D'après la définition de la borne inférieure :
  si $\alpha < b$, α n'est pas dans E, donc $f(x)\,e^{-\alpha x}$ n'est pas sommable ;
  si $\alpha > b$, il existe $\alpha_0 \in E$ tel que $b \leq \alpha_0 < \alpha$; d'après le lemme, on en déduit que $f(x)\,e^{-\alpha x}$ est sommable.
  La borne inférieure b de E est donc le nombre a que l'on cherchait.

a s'appelle l'abscisse de sommabilité de l'intégrale de Laplace.
Le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ défini par : $\{p = \alpha + i\omega \,/\, \alpha > a\}$ est le domaine de sommabilité.
Remarque : pour $\alpha = a$, $f(x)\,e^{-px}$ peut être sommable ou non sommable, suivant les cas.

exercices. Calculer les abscisses de sommabilité des intégrales de Laplace des fonctions suivantes:

$$exp(z_0 x)\theta(x) \quad , \quad z_0 = \alpha_0 + i\beta_0 \quad , \quad \alpha_0,\beta_0 \in \mathbf{R} \quad ; \quad exp(-x)\theta(x) \, ,$$

$$\theta(x) sin\, x \quad , \quad x^n \theta(x) \quad , \quad exp(-x^2)\theta(x) \quad , \quad exp(x^2)\theta(x) \, .$$

1.3. Dérivabilité de $F(p)$

On considère $F(p) = \int_0^{+\infty} \theta(x) f(x)\, e^{-px} dx$, d'abscisse de sommabilité a.
$F(p)$ est une fonction de la variable complexe $p = \alpha + i\omega$. On démontre le résultat suivant:

Proposition 2 : $F(p)$ est holomorphe dans le domaine de sommabilité de l'intégrale de Laplace $(\alpha > a)$ et l'on a

$$F^{(n)}(p) = \int_0^{+\infty} (-x)^n f(x)\, e^{-px} dx \quad , \quad n \in \mathbf{N}$$

c'est-à-dire que

$$\boxed{(-x)^n f(x)\theta(x) \ \ ] \ F^{(n)}(p)} \, . \qquad (1)$$

De plus, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'abscisse de sommabilité de l'intégrale de Laplace de $(-x)^n f(x)\theta(x)$ est encore a.

On rappelle que:
* F holomorphe dans un ouvert D $\Leftrightarrow F$ est dérivable par rapport à la variable complexe p, en tout point de D ;
* F est dérivable par rapport à p $\Leftrightarrow F$ est indéfiniment dérivable par rapport à p.

Remarque: la proposition 2 affirme que l'on peut dériver par rapport à p sous le signe intégrale; la démonstration est une conséquence du théorème de convergence dominée de Lebesgue.

1.4. Propriétés

• linéarité

Si $f_1(x)\theta(x)$ a pour transformée de Laplace $F_1(p)$ et $f_2(x)\,\theta(x)$ a pour transformée de Laplace $F_2(p)$, avec les abscisses de sommabilité respectives a_1 et a_2, alors, quels que soient λ_1, λ_2 complexes, la fonction $(\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))\theta(x)$ a pour transformée de Laplace $\lambda_1 F_1(p) + \lambda_1 F_1(p)$ avec une abscisse de sommabilité a telle que $a \leq max\{a_1, a_2\}$.
Par exemple, si $f_1 = -f_2$, on est dans le cas où $a_1 = a_2$; alors, la transformée de Laplace de $f = f_1 + f_2 = 0$ a pour abscisse de sommabilité $a = -\infty$.

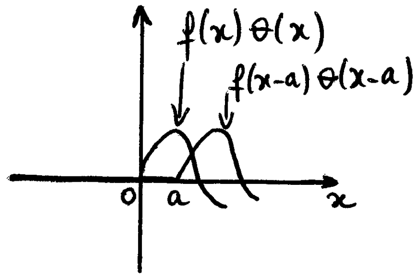
• changement d'échelle

Si $f(x)\,\theta(x)$ a pour transformée de Laplace $F(p)$, alors pour tout nombre réel $a > 0$,

$$\boxed{f(ax)\,\theta(x) \;\;] \;\; \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)}$$

exercice: quelle est l'abscisse de sommabilité de $f(ax)\theta(x)$?

• <u>translation</u>



Si $f(x)\,\theta(x)$ a pour transformée de Laplace $F(p)$, alors pour tout nombre <u>réel $a > 0$</u>,

$$\boxed{f(x-a)\,\theta(x-a) \;\;] \;\; e^{-ap}F(p)}$$

exercice: quelle est l'abscisse de sommabilité de $f(x-a)\theta(x-a)$?

• <u>multiplication par une exponentielle</u>

Si $f(x)\,\theta(x)$ a pour transformée de Laplace $F(p)$ avec l'abscisse de sommabilité a, alors pour tout <u>nombre complexe</u> γ ,

$$\boxed{e^{-\gamma x}\, f(x)\,\theta(x) \;\;] \;\; F(p+\gamma)}.$$

exercice: quelle est l'abscisse de sommabilité de $e^{-\gamma x}\, f(x)\,\theta(x)$?

<u>exercice</u>

Calculer la tranformée de Laplace de: $f(x) = \theta(x-x_1) - \theta(x-x_2) \quad , \quad x_2 > x_1 > 0$.
Préciser l'abscisse de sommabilité.

• <u>convolution</u>

Soient $f_1(s)\theta(s)$ et $f_2(s)\theta(s)$ deux fonctions de la variable réelle s, admettant des transformées de Laplace, $F_1(p)$ et $F_2(p)$, respectivement dans les domaines de sommabilité $D_1 = \{\, p \in \mathbf{C} / Re\, p > a_1\}$ et $D_2 = \{p \in \mathbf{C} / Re\, p > a_2\}$.
On s'intéresse à la transformée de Laplace du produit de convolution $\varphi = \theta f_1 * \theta f_2$:

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(s)\theta(s) f_2(x-s)\theta(x-s)\, ds .$$

On vérifie facilement que la fonction $\varphi(x)$ est nulle sur l'axe réel négatif:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \int_0^x f_1(s) f_2(x-s) ds & si \quad x > 0 \\ 0 \quad si \quad x < 0. \end{cases}$$

Finalement : $\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(s)\theta(s) f_2(x-s)\theta(x-s) ds = \theta(x) \int_0^x f_1(s) f_2(x-s) ds$.

On veut calculer $F(p) = \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(s)\theta(s) f_2(x-s)\theta(x-s)\, ds \right] e^{-px} dx$. On choisit une valeur de p telle que $\alpha = Re\, p > max\{a_1, a_2\}$. Par conséquent $F_1(p)$ et $F_2(p)$ existent, ce qui se traduit par $\int_0^{+\infty} \left| f_1(s)\theta(s) e^{-\alpha s} \right| ds < M_1$ et $\int_0^{+\infty} \left| f_2(s)\theta(s) e^{-\alpha s} \right| ds < M_2$.

Le théorème de Fubini s'applique car

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} \left| f_1(s)\theta(s) f_2(x-s)\theta(x-s) e^{-px} \right| dx \right] ds =$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| f_1(s)\theta(s) \right| \left[\int_0^{+\infty} \left| f_2(x-s)\theta(x-s) e^{-\alpha x} \right| dx \right] ds < \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f_1(s)\theta(s) \right| e^{-\alpha s} M_2\, ds < M_1 M_2.$$

Pour calculer $F(p)$, on intègre d'abord par rapport à x, puis par rapport à s.

$$F(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(s)\theta(s) \left[\int_0^{+\infty} f_2(x-s)\theta(x-s) e^{-px}\, dx \right] ds = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(s)\theta(s)\, F_2(p) e^{-ps} ds = F_1(p) F_2(p).$$

On en déduit le résultat suivant: **la transformée de Laplace du produit de convolution $\theta f_1 * \theta f_2$ est le produit des transformées de Laplace de θf_1 et de θf_2** ;

$$\boxed{L(\theta f_1 * \theta f_2) = L(\theta f_1) L(\theta f_2)}.$$

• dérivation

Soit $f(x)\,\theta(x)$ de classe C^1 sur $[0, +\infty[$. On note $f(0^+)$ la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers zéro par valeurs supérieures. On suppose de plus que f et $f\,'$ admettent des transformées de Laplace, avec les abscisses de sommabilité respectives a et $a\,'$.

Soit $p \in \mathbf{C}$, tel que $Re\, p > max\{a, a'\}$. Pour tout $X > 0$:

$$\int_0^X \left[f(x) e^{-px} \right]' dx = f(X) e^{-pX} - f(0^+) = \int_0^X f\,'(x) e^{-px} dx - p \int_0^X f(x) e^{-px} dx .$$

Les hypothèses entraînent que les deux intégrales $\int_0^X f\,'(x) e^{-px} dx$ et $\int_0^X f(x) e^{-px} dx$ ont une limite finie quand $X \to \infty$. On déduit de l'égalité ci-dessus que $f(X) e^{-pX}$ tend vers une limite finie quand $X \to \infty$. Cette limite est nécessairement nulle, sinon $\int_0^X f(x) e^{-px} dx$ n'est pas sommable. Finalement $\int_0^{+\infty} f\,'(x) e^{-px} dx = p \int_0^{+\infty} f(x) e^{-px} dx - f(0^+)$; en résumé,

si $f(x)\theta(x) \;]\; F(p)$ alors $\boxed{f\,'(x)\theta(x) \;]\; pF(p) - f(0^+)}$ (2)

Remarque: pour les fonctions nulles à l'origine, la transformation de Laplace remplace la dérivation par une multiplication par p.

Si l'on note $L(\theta f)$ et $L(\theta f')$ les transformées de Laplace respectives de θf et $\theta f'$, on peut écrire $L(\theta f')(p) = pL(\theta f)(p) - f(0^+)$ et par suite

$$F(p) = L(\theta f)(p) = \frac{L(\theta f')(p) + f(0^+)}{p} \;;$$

on en déduit que

$$\boxed{F(p) \to 0 \quad \text{quand} \quad |p| \to \infty} \;.$$

On généralise facilement le résultat (2) à l'ordre n. Si $f(x)\,\theta(x)$ est de classe C^n sur $[0, +\infty[$ et si toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre n possèdent une transformée de Laplace, alors à tous les ordres de dérivation, $k = 1, 2, \ldots, n$,

$$\boxed{\theta(x) f^{(k)}(x) \;\;]\;\; p^k F(p) - p^{k-1} f(0^+) - p^{k-2} f'(0^+) - \cdots - p\, f^{(k-2)}(0^+) - f^{(k-1)}(0^+)} \;. \qquad (3)$$

Ce résultat reste valable lorsque $f(x)\,\theta(x)$ est de classe C^{n-1} sur $[0, +\infty[$ et admet une dérivée d'ordre n, $\theta(x) f^{(n)}(x)$, continue sauf en un nombre fini de points.
A l'ordre n, le résultat (3) s'écrit:

$$L\left(\theta f^{(n)}\right)(p) = p^n L(\theta f\;)(p) - p^{n-1} f(0^+) - p^{n-2} f'(0^+) - \cdots - p f^{(n-2)}(0^+) - f^{(n-1)}(0^+) \;;$$

soit

$$F(p) = L(\theta f)(p) = \frac{f(0^+)}{p} + \frac{f'(0^+)}{p^2} + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0^+)}{p^n} + \frac{L\left(\theta f^{(n)}\right)(p)}{p^n} \;;$$

on en déduit que $\boxed{pF(p) \to f(0^+)}$ quand $|p| \to \infty$.

• <u>intégration</u>

Soit $f(x)\,\theta(x)$ continue sur $[0, +\infty[$, admettant une transformée de Laplace $F(p)$ dont l'abscisse de sommabilité est a; soit la fonction

$$\psi(x) = \begin{cases} \int_0^x f(s)\,\theta(s)ds & si \;\; x > 0 \\ 0 \;\; si \;\; x < 0 \;; & \end{cases}$$

c'est la primitive de θf qui est nulle en $x = 0$.

On peut écrire (voir le paragraphe sur la convolution): $\psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\theta(s)\theta(x-s)ds$. La fonction $\theta(x)$ a pour transformée de Laplace $\frac{1}{p}$ avec l'abscisse de sommabilité 0. On choisit alors p tel que $Re\; p > max\{0, a\}$ et on applique le résultat sur le produit de convolution. On en déduit que $\psi(x)$ a pour transformée de Laplace $\frac{F(p)}{p}$;

$$\boxed{\theta(x) \int_0^x f(s)\,\theta(s)ds \;\;]\;\; \frac{F(p)}{p}} \;. \qquad (4)$$

2. Transformation de Laplace des distributions

2.1 Définition

Si on modifie f sur un ensemble de mesure nulle, $F(p)$ n'est pas modifiée. $F(p)$ est donc attachée à la classe de fonctions f, c.à.d. à la distribution définie par la fonction localement sommable f.
On considère les distributions à support contenu dans $[0, +\infty[$: ce sont des distributions à support borné à gauche, donc appartenant à l'ensemble noté $\mathcal{D}'_+$.
On définit la transformée de Laplace d'une distribution $T \in \mathcal{D}'_+$ par :

$$\mathcal{L}(p) = \langle T, e^{-px} \rangle \qquad p = \alpha + i\omega \quad (\alpha, \omega \in \mathbb{R})$$

e^{-px} est indéfiniment dérivable, mais n'est pas à support borné ; si bien que l'expression précédente n'a pas toujours un sens. On montre que s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour $\alpha > a$, la distribution $(e^{-\alpha x} T)$ est une distribution tempérée, alors l'expression précédente a bien un sens pour tout $p \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} p > a$.

2.2. Propriétés

- la transformation de Laplace est linéaire
- $\mathcal{L}(p)$ est une fonction holomorphe de p, pour $\operatorname{Re} p > a$
- $(-x)^n\, T \sqsupset \mathcal{L}^{(n)}(p)$
- même propriétés que pour les fonctions (modulation, translation)
- convolution
  soient S et T 2 distributions de $\mathcal{D}'_+$ ayant des transformées de Laplace pour $\alpha > a_1$ et $\alpha > a_2$; on a pour $\alpha > \max(a_1, a_2)$:

$$\mathcal{S}(p) = \langle S, e^{-px} \rangle \qquad \mathcal{L}(p) = \langle T, e^{-px} \rangle$$

$$\langle S * T, e^{-pu} \rangle = \langle S_x, \langle T_y, e^{-p(x+y)} \rangle\rangle = \langle S_x, \langle T_y, e^{-px} e^{-py} \rangle\rangle$$

$$= \langle S_x, e^{-px} \rangle \langle T_y, e^{-py} \rangle$$

Donc : $S * T \sqsupset \mathcal{S}(p)\,\mathcal{L}(p)$

- transformée de Laplace de δ (δ vérifie les conditions de la définition, avec $a = -\infty$)

$$\mathcal{L}\delta(p) = \langle \delta, e^{-px} \rangle = 1$$

$$\mathcal{L}\delta'(p) = \langle \delta', e^{-px} \rangle = -\left(e^{-px}\right)'_{x=0} = p$$

$$\mathcal{L}\delta^{(m)}(p) = \langle \delta^{(m)}, e^{-px} \rangle = (-1)^m \left(e^{-px}\right)^{(m)}_{x=0} = p^m$$

$$\mathcal{L}\delta(x-a) = \langle \delta(x-a), e^{-px} \rangle = e^{-ap}$$

(5)
$$\boxed{\begin{array}{ll} \delta \sqsupset 1 & \\ \delta' \sqsupset p & \\ \delta^{(m)} \sqsupset p^m & (m \in \mathbb{N}) \\ \delta(x-a) \sqsupset e^{-pa} & \end{array}}$$

- dérivation

$$\mathcal{L}(T^{(m)}) = \mathcal{L}(T * \delta^{(m)}) = \mathcal{L}(T)\,\mathcal{L}(\delta^{(m)}) = p^m \mathcal{L}(T)$$

(6)
$$\boxed{T^{(m)} \sqsupset p^m \mathcal{L}(T)}$$

Le résultat est plus simple que pour les fonctions.
⚠ Attention, si T_f est une distribution régulière, c.a.d. une fonction localement sommable nulle sur l'axe réel < 0 on peut utiliser cette formule à condition de dériver T_f au sens des distributions.

Application : f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$, nulle pour $x<0$.

$$f' = \{f'\} + f(0^+)\,\delta \quad \text{(dérivation au sens des distributions)}$$

$$\mathcal{L}(f') = p\,\mathcal{L}(f) \Leftrightarrow \mathcal{L}(\{f'\} + f(0^+)\delta) = \mathcal{L}(\{f'\}) + f(0^+)\mathcal{L}(\delta) = p\,\mathcal{L}(f)$$

Donc : $\mathcal{L}(\{f'\}) = p\,\mathcal{L}(f) - f(0^+)$

- par convolution, on retrouve la propriété de translation
$$\delta(x-a) * T(x) = T(x-a) \Rightarrow T(x-a) \;]\; \mathcal{L}(T_x)\cdot\mathcal{L}(\delta(x-a)) = \mathcal{C}(p)\,e^{-pa}$$

- Cas particulier intéressant (pour $f(x)$ indéfiniment dérivable)

$$f(x)\cdot\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(x-n) = f(x)\,Ш(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x-n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)\,\delta(x-n)$$

Cette série de distributions a pour transformée de Laplace :

$$F(p) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)\,e^{-np}$$

Si l'on pose $z = e^p = e^{\alpha+i\omega}$,

la transformée de Laplace devient une fonction de z : $G(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)\,z^{-n}$

On l'appelle transformée en z de la suite $\{f(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Cette transformation est très utilisée en électronique lorsqu'on effectue un échantillonnage d'un signal.

3. Transformations de Fourier et de Laplace. Inversion de la T.L.

$$F(\alpha+i\omega) = \int_0^{+\infty} f(x)\,e^{-(\alpha+i\omega)x}\,dx = \int_0^{+\infty}\left(f(x)e^{-\alpha x}\right)e^{-i\omega x}\,dx$$

Pour α fixé, la fonction $G(\omega) = F(\alpha+i\omega)$ est la transformée de Fourier de la fonction $f(x)\,e^{-\alpha x}\,\mathcal{Y}(x)$.

Conséquences :

1°/ on peut calculer des T.F. à partir de T.L. souvent plus simples à obtenir

si f est nulle sur l'axe négatif, $\hat{f}(\omega) = F(i\omega)$

($\hat{f}$ désigne la T.F. et F désigne la T.L.)

2°/ si la transformée de Laplace de $f(x)$ est nulle pour $\operatorname{Re} p > a$, alors $f(x)$ est presque partout nulle.

En effet $f(x)e^{-\alpha x}$ a une transformée de Fourier nulle (pour $\alpha > a$); elle est donc presque partout nulle ; il en est de même pour $f(x)$.

Donc : <u>une fonction holomorphe de p n'a jamais plus d'un original de Laplace.</u>

En effet : si f_1 et f_2 ont même T.L., alors (f_1-f_2) a une T.L. nulle, donc $f_1 = f_2$ presque partout.

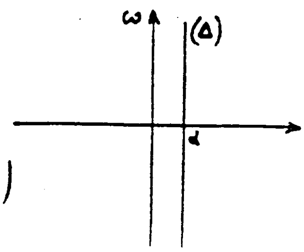
3°/ la formule d'inversion de Laplace se déduit de la formule d'inversion de Fourier lorsque celle-ci peut être écrite.

$$\mathcal{Y}(x)\,f(x)\,e^{-\alpha x} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha+i\omega)\,e^{i\omega x}\,d\omega$$

$$\Theta(x) f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha + i\omega)\, e^{(\alpha + i\omega) x}\, d\omega$$

$$\Theta(x) f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} F(p)\, e^{px}\, dp \qquad \alpha + i\omega = p$$

(intégration le long de Δ)



Cette intégrale, effectuée sur un axe // à l'axe imaginaire, doit donner le même résultat, quel que soit $\alpha > a$.

Lorsque c'est possible on préfère trouver l'original en utilisant le tableau des transformées de Laplace.

On admettra le théorème suivant:

> Pour qu'une fonction $\mathcal{L}(p)$ holomorphe soit transformée de Laplace d'une distribution $T \in \mathcal{D}'_+$, il faut et il suffit qu'il existe un demi-plan ($\alpha > a$) dans lequel elle soit majorée en module par un polynôme en p.

4. Résolution d'une équation de convolution dans une algèbre de convolution.

4.1. Algèbre de convolution

C'est un espace vectoriel de distributions, contenant δ et sur lequel on peut définir le produit de convolution d'un nombre fini quelconque de distributions.
On se limitera aux 3 algèbres suivantes :

- $\mathcal{E}'$: espace des distributions à support borné
- $\mathcal{D}'_+$: espace des distributions à support borné à gauche
- $\mathcal{D}'_-$: espace des distributions à support borné à droite

4.2. Equation de convolution

On a déjà vu qu'un grand nombre d'équations correspondant à des problèmes physiques peuvent se mettre sous la forme d'une équation de convolution :

$\boxed{A * X = B}$ où A et B sont 2 distributions données et X une distribution inconnue, dans une certaine algèbre de convolution

Si, dans cette algèbre de convolution, il existe A^{*-1} telle que

$$A^{*-1} * A = \delta$$

alors :

$$A^{*-1} * (A * X) = A^{*-1} * B$$

$$(A^{*-1} * A) * X = \delta * X = \boxed{X = A^{*-1} * B}$$

La solution X de l'équation de départ est unique, car s'il y en avait une autre Y, elle vérifierait $A * Y = B$, donc $Y = A^{*-1} * B$.

En particulier A^{*-1} est unique.

4.3. Recherche de l'inverse de convolution

$$\mathcal{L}(A^{*-1} * A) = \mathcal{L}(A^{*-1})\, \mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(\delta) = 1$$

$$\mathcal{L}(A^{*-1}) = \frac{1}{\mathcal{L}(A)}$$

Si A possède une T.L. $\mathcal{L}(A)$ telle que $1/\mathcal{L}(A)$ soit majorée en module par un polynôme en p, alors $1/\mathcal{L}(A)$ est la T.L. de A^{*-1}.
On détermine A^{*-1} et on en déduit X.

On peut aussi raisonner directement sur $A * X = B$.
Si A et B ont des transformées de Laplace $\mathcal{L}(A)$ et $\mathcal{L}(B)$ telles que $\mathcal{L}(B)/\mathcal{L}(A)$ soit majoré en module par un polynôme en p, alors $\mathcal{L}(B)/\mathcal{L}(A)$ est la T.L. de X que l'on peut ainsi déterminer.

4.4. Application à la résolution d'équations différentielles linéaires à coefficients constants

$$a_0 X(t) + a_1 \frac{dX(t)}{dt} + \cdots + a_n \frac{d^n X(t)}{dt^n} = B(t)$$

$$[a_0 \delta(t) + a_1 \delta'(t) + \cdots + a_n \delta^{(n)}(t)] * X(t) = B(t)$$

$$A(t) * X(t) = B(t)$$

Dans ce cas particulier, A s'écrit $A = D\delta$, où D est un opérateur différentiel à coefficients constants.

$D\delta$ a pour transformée de Laplace un polynôme en p, noté $P(p)$.

$$(D\delta)^{*-1} \sqsupset \frac{1}{P(p)}$$

$\frac{1}{P(p)}$ est une fraction rationnelle, on la décompose en éléments simples.

$$(D\delta)^{*-1} \sqsupset \sum_k \frac{c_k}{(p-p_k)^{\gamma_k}}$$

On sait trouver l'original de Laplace du 2ème membre.

$$(D\delta)^{*-1} = \Theta(t) \sum_k c_k e^{p_k t} \frac{t^{\gamma_k - 1}}{(\gamma_k - 1)!}$$

on en déduit $X(t) = (D\delta)^{*-1} * B(t)$
(voir exercices d'application)

PROPRIETES DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

$f(x)\ \theta(x)$	$F(p)$
$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)\ \theta(x)$	$\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2$
$-x\ f(x)\ \theta(x)$	$F'(p)$
$(-x)^n\ f(x)\ \theta(x)$	$F^{(n)}(p)$
$f(x-a)\ \theta(x-a)$	$F(p)\ e^{-pa} \qquad a > 0$
$f(ax)\ \theta(x)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right) \qquad a > 0$
$f(x)\ e^{-ax}\ \theta(x)$	$F(p+a) \qquad a \in \mathbf{C}$
$f_1(x)\ \theta(x) * f_2(x)\ \theta(x)$	$F_1(p)\ F_2(p)$
$f'(x)\ \theta(x)$	$pF(p) - f(0^+)$
$f''(x)\ \theta(x)$	$p^2\ F(p) - p\ f(0^+) - f'(0^+)$
$\theta(x) \int_0^x f(s)\ \theta(s)\ ds$	$\frac{F(p)}{p}$

TRANSFORMEES DE LAPLACE USUELLES

f(x)	F(p)
$\theta(x)$	$\dfrac{1}{p}$
δ	1
$\theta(x)\ x^n \qquad (n \in \mathbf{N})$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
$\theta(x)\ e^{-ax} \qquad (a \in \mathbf{C})$	$\dfrac{1}{p+a}$
$\theta(x)\ x\ e^{-ax} \qquad (a \in \mathbf{C})$	$\dfrac{1}{(p+a)^2}$
$\theta(x)\ \dfrac{e^{-ax} - e^{-bx}}{b-a} \qquad (a \in \mathbf{C}) \quad , \quad (b \in \mathbf{C})$	$\dfrac{1}{(p+a)(p+b)}$
$\theta(x)\ \mathrm{ch}\ \omega x \qquad (\omega \in \mathbf{R})$	$\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$
$\theta(x)\ \mathrm{sh}\ \omega x \qquad (\omega \in \mathbf{R})$	$\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$
$\theta(x)\ \cos \omega x \qquad (\omega \in \mathbf{R})$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
$\theta(x)\ \sin \omega x \qquad (\omega \in \mathbf{R})$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\theta(x)\ e^{-ax} \cos \omega x \qquad (a \in \mathbf{C}) \quad , \quad (\omega \in \mathbf{R})$	$\dfrac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$
$\theta(x)\ e^{-ax} \sin \omega x \qquad (a \in \mathbf{C}) \quad , \quad (\omega \in \mathbf{R})$	$\dfrac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
$\theta(x)\ x \cos \omega x$	$\dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$\theta(x)\ x \sin \omega x$	$\dfrac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$